Johdatus graafiteoriaan

Syksy 2017

Lauri Hella

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta

Luku 1

Peruskäsitteitä

1.1 Määritelmiä
1.2 Esimerkkejä
1.3 Terminologiaa
1.4 Joitakin erikoisia yksinkertaisia graafeja
1.5 Aligraafi
1.6 Komplementtigraafi
1.7 Graafioperaatioita
1.8 Graafien esittäminen matriisien avulla
1.9 Isomorfisuus

1.1 Määritelmiä

Määritelmä 1.1
Yksinkertainen graafi G on pari (V, E), missä $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on äärellinen joukko järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$, $u \neq v$. Joukon V alkioita sanotaan *solmuiksi* ja joukon E alkioita *särmiksi*.

1.1 Määritelmiä

Määritelmä 1.1
Yksinkertainen graafi G on pari (V, E), missä $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on äärellinen joukko järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$, $u \neq v$. Joukon V alkioita sanotaan *solmuiksi* ja joukon E alkioita *särmiksi*.

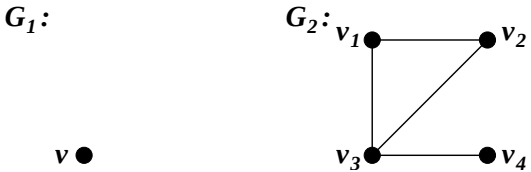
Yksinkertaisen graafin käsite voidaan määritellä lyhyemmin seuraavasti:

Määritelmä 1.2
Yksinkertainen graafi koostuu solmuista ja niitä yhdistävistä särmistä, missä

1. kahden eri solmun välillä voi olla korkeintaan yksi särmä,
2. solmusta ei voi olla särmää solmuun itseensä.

Yksisolmuista yksinkertaista graafia sanotaan *triviaaliksi graafiksi*.

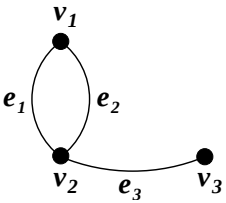
Graafeja havainnollistetaan usein seuraavanlaisilla kuvilla:



Kuva 1.1. Triviaali graafi $G_1 = (\{v\}, \emptyset)$ ja yksinkertainen graafi $G_2 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\})$.

Määritelmä 1.3

Multigraafi on yksinkertaisen graafin yleistys, jossa kahden eri solmun välillä voi olla useita (äärellinen määrä) särmiä.



Kuva 1.2. Multigraafi (V, E), missä $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ ja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Multigraafin käsite voidaan määritellä kahdella toisistaan poikkeavalla tavalla.

(1) Multigraafi voidaan määritellä parina (V, E), missä V on äärellinen epätyhjä solmujoukko ja särmäjoukko E on joukon V järjestämättömien pisteparien $\{u, v\}$ $(u \neq v)$ muodostama *multijoukko*.

Multigraafin käsite voidaan määritellä kahdella toisistaan poikkeavalla tavalla.

(1) Multigraafi voidaan määritellä parina (V, E), missä V on äärellinen epätyhjä solmujoukko ja särmäjoukko E on joukon V järjestämättömien pisteparien $\{u, v\}$ $(u \neq v)$ muodostama *multijoukko*.

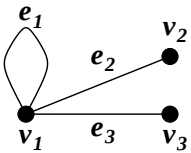
(2) Multigraafi voidaan määritellä kolmikkona (V, E, f), missä V on äärellinen epätyhjä solmujoukko, E on äärellinen särmäjoukko ja f on funktio

$$f : E \to \{\, \{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v \,\}.$$

Jos $f(e_1) = f(e_2)$, särmät e_1 ja e_2 ovat *rinnakkaisia*.

Määritelmä 1.4

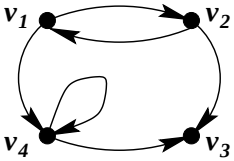
Pseudograafi on multigraafin yleistys, jossa solmusta voi olla särmä tai särmiä solmuun itseensä. Näitä särmiä sanotaan *luupeiksi*.



Kuva 1.3. Pseudograafi $(V, E) = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{e_1, e_2, e_3\})$.

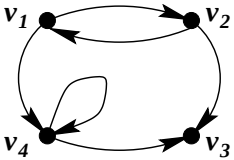
Määritelmä 1.5

Suunnattu graafi eli *digraafi* G on pari (V, E), missä $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on joukko järjestettyjä pareja (u, v), missä $u, v \in V$.



Kuva 1.4. Suunnattu graafi $(V, E) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_4, v_4)\})$.

Määritelmä 1.5
Suunnattu graafi eli *digraafi* G on pari (V, E), missä $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on joukko järjestettyjä pareja (u, v), missä $u, v \in V$.



Kuva 1.4. Suunnattu graafi $(V, E) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_4, v_4)\})$.

Suunnatun graafin särmiä sanotaan *kaariksi* tai *nuoliksi*. Määritelmässä 1.5 ei edellytetä, että $u \neq v$, joten suunnatussa graafissa voi olla luuppeja.

Myös suunnatun graafin käsite voidaan ilmaista lyhyemmin:

Määritelmä 1.6

Suunnattu graafi koostuu solmuista ja niitä yhdistävistä kaarista, missä

1. kahden eri solmun välillä voi olla korkeintaan kaksi kaarta, yksi kumpaankin suuntaan,
2. solmusta voi olla kaari solmuun itseensä.

Myös suunnatun graafin käsite voidaan ilmaista lyhyemmin:

Määritelmä 1.6

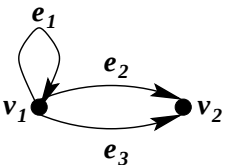
Suunnattu graafi koostuu solmuista ja niitä yhdistävistä kaarista, missä

1. kahden eri solmun välillä voi olla korkeintaan kaksi kaarta, yksi kumpaankin suuntaan,
2. solmusta voi olla kaari solmuun itseensä.

Graafin $G = (V, E)$ solmujoukolle V voidaan tarvittaessa käyttää merkintää $V(G)$ ja särmäjoukolle E merkintää $E(G)$. Tämä koskee yksinkertaisia graafeja, multigraafeja, suunnattuja graafeja, ja kaikki muitakin tarkastelemiamme graafeja.

Määritelmä 1.7

Suunnattu multigraafi on suunnatun graafin yleistys, jossa voi olla moninkertaisia kaaria.



Kuva 1.5. Suunnattu multigraafi $(V, E) = (\{v_1, v_2\}, \{e_1, e_2, e_3\})$.

Määritelmä 1.8

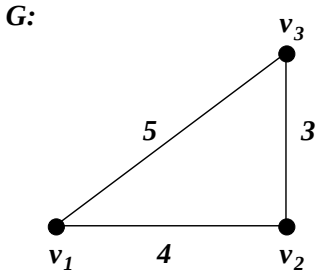
Painotettu graafi on graafin yleistys, jossa jokaiseen särmään on liitetty jokin luku. Tätä lukua sanotaan särmän *painoksi*.

Määritelmä 1.8
Painotettu graafi on graafin yleistys, jossa jokaiseen särmään on liitetty jokin luku. Tätä lukua sanotaan särmän *painoksi*.

Määritelmä 1.9
Merkinnällä $w(\cdot)$ tarkoitetaan särmän painoa tai painotetun graafin särmien yhteenlaskettua painoa.

Esimerkki 1.1

Kuvan 1.6 graafissa G särmien painot ovat $w(\{v_1, v_3\}) = 5$, $w(\{v_2, v_3\}) = 3$ ja $w(\{v_1, v_2\}) = 4$. Graafin G särmien yhteenlaskettu paino $w(G)$ on 12.

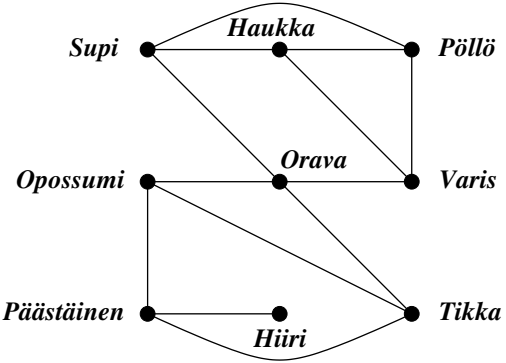


Kuva 1.6. Painotettu graafi G, joka mallintaa Pythagoraan lausetta.

1.2 Esimerkkejä

Esimerkki 1.2

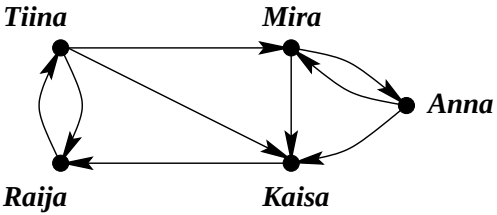
Graafien avulla voidaan mallintaa eri eläinlajien välistä vuorovaikutusta. Esimerkiksi ekosysteemissä lajien välistä kilpailua voidaan mallintaa graafilla, joka kuvaa ekologisten lokeroiden päällekkäisyyttä. Kuvan 1.7 graafi mallintaa metsän ekosysteemiä. Graafin perusteella esimerkiksi orava ja supi ovat keskenään kilpailevia lajeja, mutta varis ja päästäinen eivät ole.



Kuva 1.7. Ekologisten lokeroiden päällekkäisyys.

Esimerkki 1.3

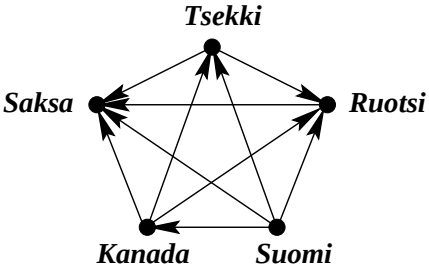
Ryhmän käyttäytymistä tutkittaessa voidaan havaita, että jotkut ryhmän jäsenet voivat vaikuttaa ryhmän muiden jäsenten käyttäytymiseen. Tällaista käyttäytymistä voidaan mallintaa suunnatulla vaikutusvaltagraafilla. Kuvan 1.8 graafin mukaan esimerkiksi Kaisa voi vaikuttaa Raijan käyttäytymiseen, Raija voi vaikuttaa Tiinan käyttäytymiseen ja Tiina voi vaikuttaa Kaisan käyttäytymiseen.



Kuva 1.8. Ryhmän jäsenten vaikutus toistensa käyttäytymiseen.

Esimerkki 1.4

Turnausta, jossa jokainen joukkue pelaa toistaan vastaan täsmälleen kerran, voidaan mallintaa suunnatulla graafilla. Tällöin kutakin joukkuetta vastaa oma solmunsa ja graafissa on särmä (a, b), jos joukkue a voittaa joukkueen b. Esimerkiksi kuvan 1.9 turnauksessa Suomi on voittamaton ja Ruotsilla on yksi voitto sekä kolme tappiota.



Kuva 1.9. Vuodenvaihteen 1996–97 jääkiekon nuorten MM–kisatulokset.

Esimerkki 1.5

Tietokoneohjelman käskyjen suoritusjärjestys voidaan mallintaa suunnatulla graafilla, jossa kutakin käskyä edustaa oma solmunsa ja solmusta a on särmä solmuun b, jos käsky a suoritetaan ennen käskyä b. Kuvan 1.10 suunnatussa graafissa G_1 esimerkiksi käskyä s_5 ei voida suorittaa ennen käskyjä s_1, s_2 ja s_4, mutta käskyt s_5 ja s_6 voidaan suorittaa samanaikaisesti. ”Turhat” särmät voidaan myös jättää pois, jolloin saadan suunnattu graafi G_2.

s_1: $a := 0$

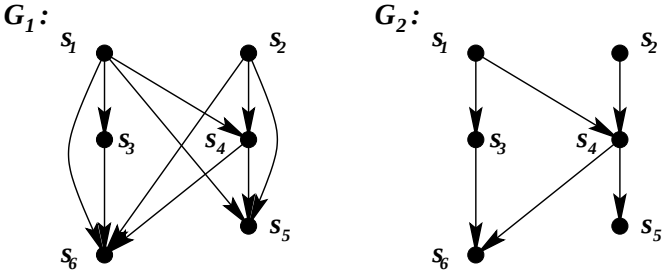
s_2: $b := 1$

s_3: $c := a + 1$

s_4: $d := a + b$

s_5: $e := d + 1$

s_6: $f := c + d$



Kuva 1.10. Tietokoneohjelman käskyjen suoritusjärjestys.

1.3 Terminologiaa

Määritelmä 1.10

Olkoon solmujen u ja v välillä särmä e. Silloin

1. solmut u ja v ovat *vierussolmut*,
2. särmä e *yhdistää* solmut u ja v,
3. solmut u ja v ovat särmän e *päätesolmut* eli *päätepisteet*,
4. särmä e kulkee solmujen u ja v kautta.

1.3 Terminologiaa

Määritelmä 1.10
Olkoon solmujen u ja v välillä särmä e. Silloin

1. solmut u ja v ovat *vierussolmut*,
2. särmä e *yhdistää* solmut u ja v,
3. solmut u ja v ovat särmän e *päätesolmut* eli *päätepisteet*,
4. särmä e kulkee solmujen u ja v kautta.

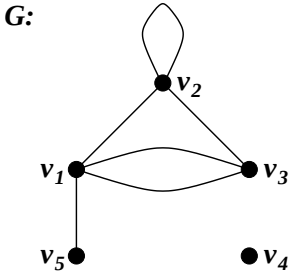
Määritelmä 1.11
Solmun aste $\deg(\cdot)$ ilmaisee kuinka monen särmän päätesolmuna solmu on.

Määritelmä 1.12
Solmu u on *eristetty*, jos $\deg(u) = 0$, ja solmu u on *loppusolmu*, jos $\deg(u) = 1$. Jos särmän päätesolmuna on loppusolmu, särmä on *loppusärmä*.

Esimerkki 1.6

Kuvassa 1.11 solmujen asteet on merkitty solmujen viereen. Solmu v_4 on eristetty solmu ja solmu v_5 loppusolmu.

Huom: luuppi kasvattaa solmun v_2 astetta kahdella.



$$\deg(v_1) = 4$$
$$\deg(v_2) = 4$$
$$\deg(v_3) = 3$$
$$\deg(v_4) = 0$$
$$\deg(v_5) = 1$$

Kuva 1.11. Graafi G ja graafin G solmujen asteet.

Lause 1.1 (”Handshaking theorem”)

Olkoon (V, E) *suuntaamaton graafi. Silloin*

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

Merkinnällä $|\cdot|$ *tarkoitetaan joukon alkioiden (tässä siis särmien) lukumäärää.*

Lause 1.1 (”Handshaking theorem”)

Olkoon (V, E) *suuntaamaton graafi. Silloin*

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

Merkinnällä $|\cdot|$ *tarkoitetaan joukon alkioiden (tässä siis särmien) lukumäärää.*

Lause 1.2

Suuntaamattomassa graafissa on parillinen määrä paritonasteisia solmuja.

Määritelmä 1.13
Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton graafi. Silloin

$$\delta(G) = \min_{v \in V}(\deg(v))$$

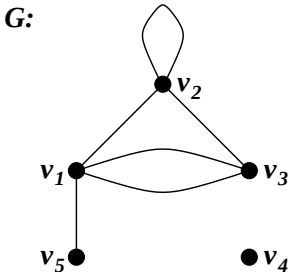
on graafin solmujen *minimiaste* ja

$$\Delta(G) = \max_{v \in V}(\deg(v))$$

maksimiaste.

Esimerkki 1.7

Kuvan 1.11 graafin minimiaste ja maksimiaste ovat $\delta(G) = 0$ ja $\Delta(G) = 4$.



$\deg(v_1) = 4$

$\deg(v_2) = 4$

$\deg(v_3) = 3$

$\deg(v_4) = 0$

$\deg(v_5) = 1$

Kuva 1.11. Graafi G ja graafin G solmujen asteet.

Määritelmä 1.14

Olkoon $e = (u, v)$ suunnatun graafin kaari solmusta u solmuun v. Silloin

1. solmu u *edeltää* solmua v,
2. solmu v *seuraa* solmua u,
3. solmu u on särmän e *lähtösolmu*,
4. solmu v on särmän e *maalisolmu*.

Määritelmä 1.14

Olkoon $e = (u, v)$ suunnatun graafin kaari solmusta u solmuun v. Silloin

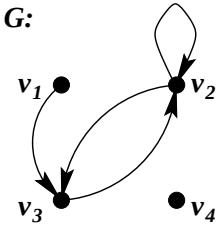
1. solmu u *edeltää* solmua v,
2. solmu v *seuraa* solmua u,
3. solmu u on särmän e *lähtösolmu*,
4. solmu v on särmän e *maalisolmu*.

Määritelmä 1.15

Solmun *lähtöaste* $\deg^+(\cdot)$ tarkoittaa niiden kaarien lukumäärää, joiden lähtösolmuna solmu on. Vastaavasti solmun *tuloaste* $\deg^-(\cdot)$ tarkoittaa niiden kaarien lukumäärää, joiden maalisolmuna solmu on.

Esimerkki 1.8

Kuvassa 1.12 näkyvät graafin G solmujen lähtö- ja tuloasteet.

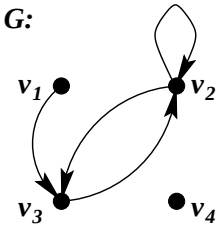


$$\deg^+(v_1) = 1, \quad \deg^-(v_1) = 0,$$
$$\deg^+(v_2) = 2, \quad \deg^-(v_2) = 2,$$
$$\deg^+(v_3) = 1, \quad \deg^-(v_3) = 2,$$
$$\deg^+(v_4) = 0, \quad \deg^-(v_4) = 0$$

Kuva 1.12. Suunnatun graafin G lähtö- ja tuloasteet.

Esimerkki 1.8

Kuvassa 1.12 näkyvät graafin G solmujen lähtö- ja tuloasteet.



$$\deg^+(v_1) = 1, \quad \deg^-(v_1) = 0,$$
$$\deg^+(v_2) = 2, \quad \deg^-(v_2) = 2,$$
$$\deg^+(v_3) = 1, \quad \deg^-(v_3) = 2,$$
$$\deg^+(v_4) = 0, \quad \deg^-(v_4) = 0$$

Kuva 1.12. Suunnatun graafin G lähtö- ja tuloasteet.

Lause 1.3

Olkoon (V, E) suunnattu graafi. Silloin

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|.$$

1.4 Joitakin erikoisia yksinkertaisia graafeja

Joillakin yksinkertaisilla graafeilla on erityinen nimi, jotta niihin on helppo viitata. Seuraavaksi määrittelemme muutamia tällaisia graafeja.

1.4 Joitakin erikoisia yksinkertaisia graafeja

Joillakin yksinkertaisilla graafeilla on erityinen nimi, jotta niihin on helppo viitata. Seuraavaksi määrittelemme muutamia tällaisia graafeja.

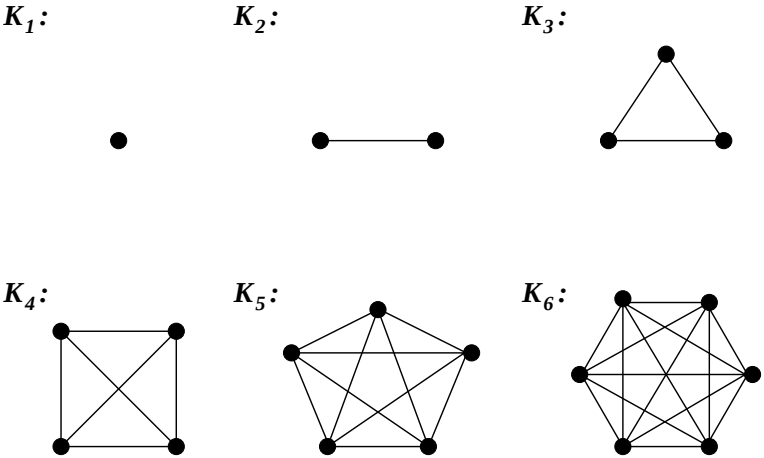
Määritelmä 1.16
Yksinkertainen graafi on *täydellinen*, jos jokaisen kahden eri solmun välillä on särmä. Täydelliselle n-solmuiselle graafille käytetään merkintää K_n.

1.4 Joitakin erikoisia yksinkertaisia graafeja

Joillakin yksinkertaisilla graafeilla on erityinen nimi, jotta niihin on helppo viitata. Seuraavaksi määrittelemme muutamia tällaisia graafeja.

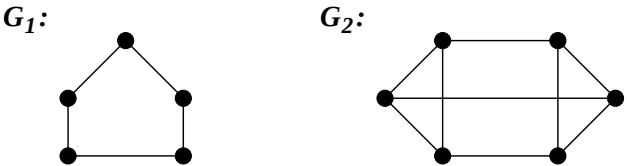
Määritelmä 1.16
Yksinkertainen graafi on *täydellinen*, jos jokaisen kahden eri solmun välillä on särmä. Täydelliselle n-solmuiselle graafille käytetään merkintää K_n.

Täydellisessä graafissa K_n on $n(n-1)/2$ särmää.



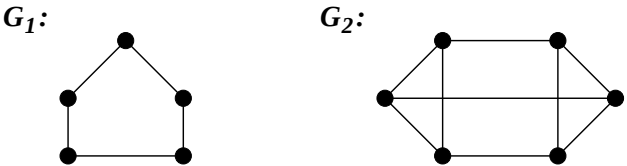
Kuva 1.13. Täydelliset graafit $K_1, K_2, \ldots, K_6$.

Määritelmä 1.17
Yksinkertainen graafi on *k-säännöllinen*, jos sen jokaisen solmun aste on k.



Kuva 1.14. Graafi G_1 on 2-säännöllinen ja graafi G_2 on 3-säännöllinen.

Määritelmä 1.17
Yksinkertainen graafi on k-*säännöllinen*, jos sen jokaisen solmun aste on k.

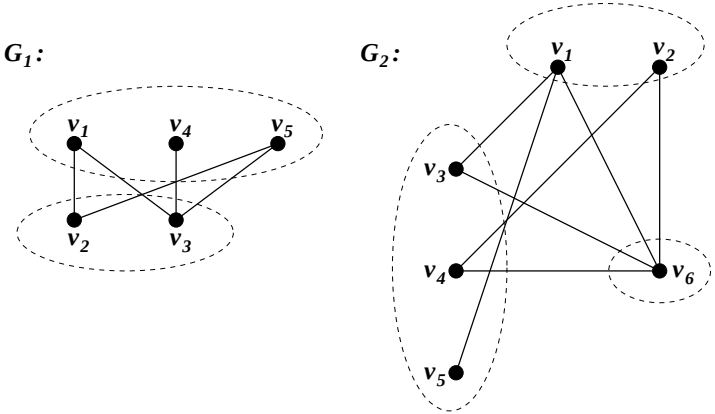


Kuva 1.14. Graafi G_1 on 2-säännöllinen ja graafi G_2 on 3-säännöllinen.

Täydellinen graafi K_n on $(n-1)$-säännöllinen.

Määritelmä 1.18

Suuntaamaton graafi (V, E) on *kaksijakoinen*, jos solmujoukko V voidaan jakaa kahteen sellaiseen epätyhjään joukkoon V_1 ja V_2, että jokaisen särmän toinen päätesolmu kuuluu joukkoon V_1 ja toinen joukkoon V_2.



Kuva 1.15. Kaksijakoinen graafi G_1 ja kolmijakoinen graafi G_2.

Määritelmä 1.19

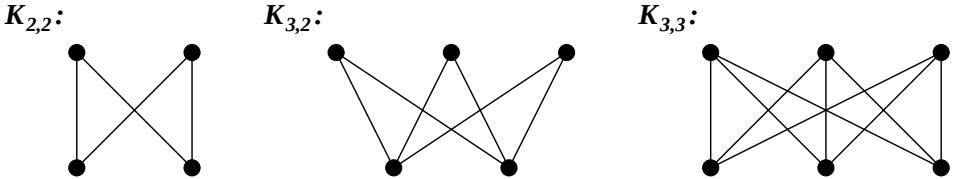
Suuntaamaton graafi (V, E) on *k-jakoinen*, jos on olemassa sellainen solmujoukon V luokkajako $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$, että joukon E minkään särmän molemmat päätesolmut eivät kuulu samaan joukkoon V_i.

Määritelmä 1.19

Suuntaamaton graafi (V, E) on *k-jakoinen*, jos on olemassa sellainen solmujoukon V luokkajako $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$, että joukon E minkään särmän molemmat päätesolmut eivät kuulu samaan joukkoon V_i.

Määritelmä 1.20

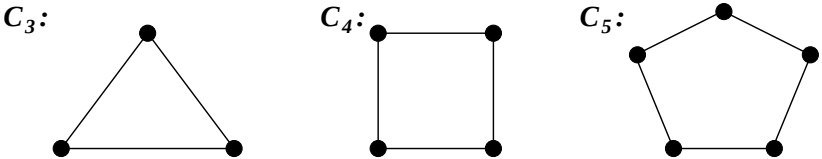
Yksinkertainen graafi $K_{m,n}$ on *täydellinen kaksijakoinen graafi*, jos sen solmut voidaan jakaa kahteen sellaiseen m- ja n-alkioiseen osajoukkoon, että kahden solmun välillä on särmä täsmälleen silloin, kun solmut kuuluvat eri osajoukkoihin.



Kuva 1.16. Täydelliset kaksijakoiset graafit $K_{2,2}$, $K_{3,2}$ ja $K_{3,3}$.

Määritelmä 1.21

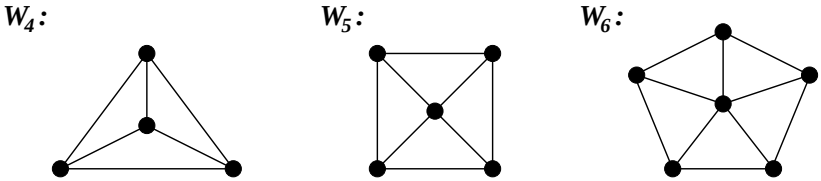
Yksinkertainen graafi $C_n = (V, E)$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$ on *silmukka*, jos sen solmut ja särmät voidaan antaa joukkoina $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ja $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.



Kuva 1.17. Silmukat C_3, C_4 ja C_5.

Määritelmä 1.22

Silmukasta C_{n-1} saadaan *pyörä* $W_n = (V, E)$ ($n = 4, 5, 6, \ldots$), kun siihen lisätään yksi solmu ja lisäksi särmä tästä solmusta jokaiseen muuhun pyörän solmuun.

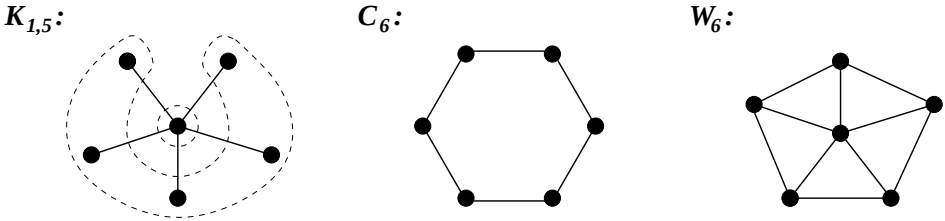


Kuva 1.18. Pyörät W_4, W_5 ja W_6.

Graafien avulla voidaan mallintaa tietokoneverkkoja. Tällöin graafin solmut vastaavat verkon koneita ja särmät yhteyksiä koneiden välillä (”piuhoja”).

Esimerkki 1.9 (lähiverkko)

Koneet voidaan liittää verkkoon esimerkiksi (a) yhdistämällä kaikki koneet keskuskoneeseen ($K_{1,n-1}$), (b) yhdistämällä koneet silmukaksi (C_n) tai (c) yhdistämällä koneet pyöräksi (W_n), jossa keskuskone on yhdistettynä kaikkiin muihin koneisiin (ks. kuva 1.19).



Kuva 1.19. Kolme lähiverkkoa.

1.5 Aligraafi

Määritelmä 1.23

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ sellaisia graafeja, että $W \subseteq V$ ja $F \subseteq E$. Silloin graafi H on graafin G *aligraafi*. Jos lisäksi $W \subset V$ tai $F \subset E$, niin kyseessä on *aito aligraafi*.

1.5 Aligraafi

Määritelmä 1.23

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ sellaisia graafeja, että $W \subseteq V$ ja $F \subseteq E$. Silloin graafi H on graafin G *aligraafi*. Jos lisäksi $W \subset V$ tai $F \subset E$, niin kyseessä on *aito aligraafi*.

Huomautus

Koska aligraafi $H = (W, F)$ on graafi, niin $W \neq \emptyset$.

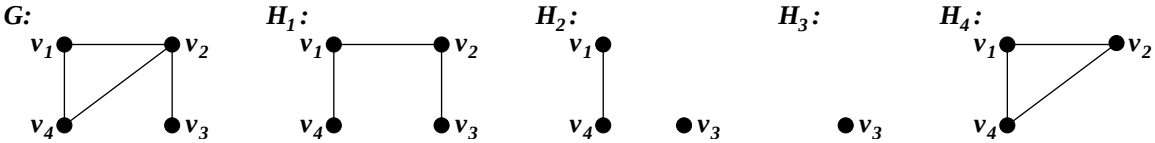
1.5 Aligraafi

Määritelmä 1.23

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ sellaisia graafeja, että $W \subseteq V$ ja $F \subseteq E$. Silloin graafi H on graafin G *aligraafi*. Jos lisäksi $W \subset V$ tai $F \subset E$, niin kyseessä on *aito aligraafi*.

Huomautus

Koska aligraafi $H = (W, F)$ on graafi, niin $W \neq \emptyset$.



Kuva 1.20. Graafi G ja joitakin sen aligraafeja.

Esimerkki 1.10

Graafilla K_n on $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^{i(i-1)/2}$ eri aligraafia.

Esimerkki 1.10

Graafilla K_n on $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^{i(i-1)/2}$ eri aligraafia.

Määritelmä 1.24

Jos graafin G aligraafi H on täydellinen graafi, niin H on graafin G *klikki*.

Esimerkki 1.10

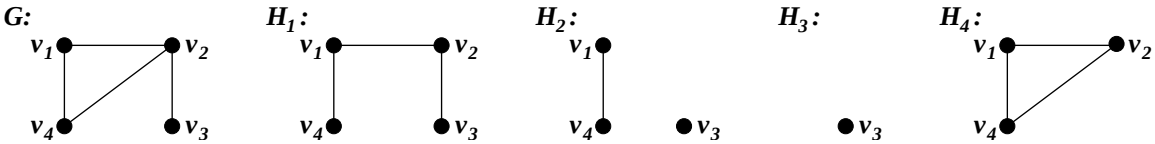
Graafilla K_n on $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}2^{i(i-1)/2}$ eri aligraafia.

Määritelmä 1.24

Jos graafin G aligraafi H on täydellinen graafi, niin H on graafin G *klikki*.

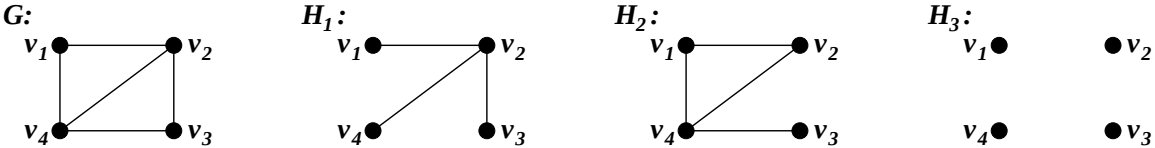
Esimerkki 1.11

Kuvassa 1.20 aligraafit H_3 ja H_4 ovat graafin G klikkejä.



Kuva 1.20. Graafi G ja joitakin sen aligraafeja.

Määritelmä 1.25
Olkoon $G = (V, E)$ ja $H = (V, F)$ sen aligraafi. Silloin H on graafin G *virittävä* aligraafi.



Kuva 1.21. Graafi G ja joitakin sen virittäviä aligraafeja.

Määritelmä 1.26

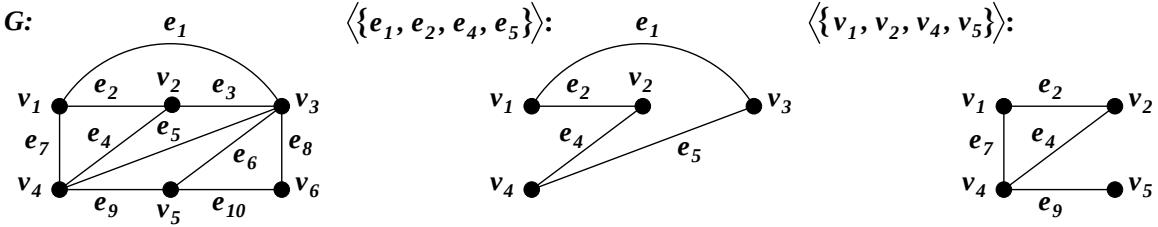
Olkoon $G = (V, E)$ graafi ja $F \subseteq E$ sen epätyhjä särmäjoukko. Tällöin $H = (W, F)$, missä $W \subseteq V$ on joukon F särmien päätesolmujen joukko, on joukon F (*särmä*)*indusoima* graafin G aligraafi. Tällöin merkitään $H = \langle F \rangle$.

Määritelmä 1.26

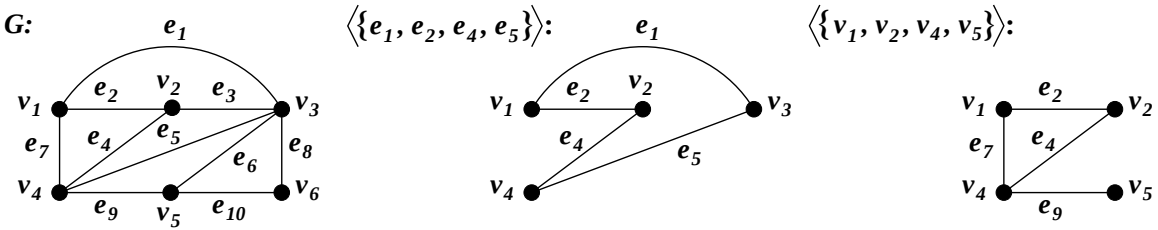
Olkoon $G = (V, E)$ graafi ja $F \subseteq E$ sen epätyhjä särmäjoukko. Tällöin $H = (W, F)$, missä $W \subseteq V$ on joukon F särmien päätesolmujen joukko, on joukon F (*särmä*)*indusoima* graafin G aligraafi. Tällöin merkitään $H = \langle F \rangle$.

Määritelmä 1.27

Olkoon $G = (V, E)$ graafi ja $W \subseteq V$ sen epätyhjä solmujoukko. Tällöin $H = (W, F)$ on joukon W (*solmu*)*indusoima* graafin G aligraafi, jos $F \subseteq E$ muodostuu niistä joukon E särmistä, joiden päätesolmut kuuluvat joukkoon W. Tällöin merkitään $H = \langle W \rangle$.



Kuva 1.22. Graafi G ja tämän särmäindusoitu aligraafi $\langle\{e_1, e_2, e_4, e_5\}\rangle$ sekä solmuindusoitu aligraafi $\langle\{v_1, v_2, v_4, v_5\}\rangle$.



Kuva 1.22. Graafi G ja tämän särmäindusoitu aligraafi $\langle\{e_1, e_2, e_4, e_5\}\rangle$ sekä solmuindusoitu aligraafi $\langle\{v_1, v_2, v_4, v_5\}\rangle$.

Joskus on käytännöllistä samastaa särmäjoukko (tai solmujoukko) ja sen indusoima graafi.

Määritelmä 1.28

Graafin G aligraafia H sanotaan graafin G *maksimaaliseksi* aligraafiksi jonkin ominaisuuden P suhteen, jos

(i) graafilla H on ominaisuus P ja

(ii) aina, kun H on graafin G aligraafin F aito aligraafi, aligraafilla F ei ole ominaisuutta P.

Vastaavasti määritellään *minimaalinen* aligraafi.

Määritelmä 1.28

Graafin G aligraafia H sanotaan graafin G *maksimaaliseksi* aligraafiksi jonkin ominaisuuden P suhteen, jos

(i) graafilla H on ominaisuus P ja

(ii) aina, kun H on graafin G aligraafin F aito aligraafi, aligraafilla F ei ole ominaisuutta P.

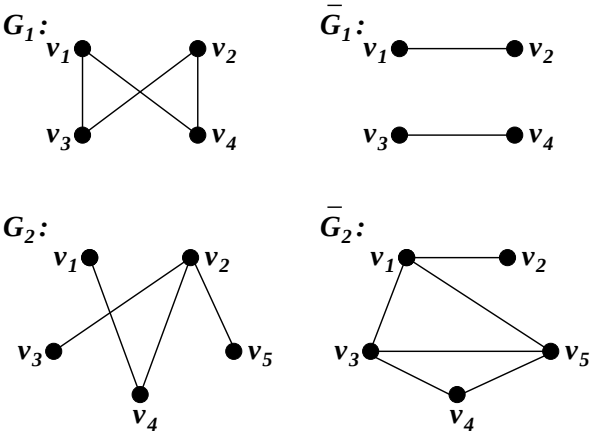
Vastaavasti määritellään *minimaalinen* aligraafi.

Maksimaalinen tai minimaalinen aligraafi ei siis välttämättä ole yksikäsitteinen.

1.6 Komplementtigraafi

Määritelmä 1.29
Yksinkertaisen graafin G *komplementtigraafi* $\overline{G}$ on graafi, jonka solmut ovat samat kuin graafin G solmut ja jossa kaksi eri solmua ovat vierussolmuja täsmälleen silloin, kun ne eivät ole vierussolmuja graafissa G.

Selvästikin graafi on aina komplementtinsa komplementti eli $\overline{\overline{G}} = G$.



Kuva 1.23. Graafit G_1 ja G_2 ja niiden komplementtigraafit $\overline{G}_1$ ja $\overline{G}_2$.

Lause 1.4

Olkoon G vähintään kuusisolmuinen graafi. Tällöin täydellinen 3-solmuinen graafi K_3 on joko graafin G tai sen komplementin $\overline{G}$ aligraafi.

Lause 1.4

Olkoon G vähintään kuusisolmuinen graafi. Tällöin täydellinen 3-solmuinen graafi K_3 on joko graafin G tai sen komplementin $\overline{G}$ aligraafi.

Lauseen 1.4 ongelmaa voidaan tarkastella myös yleisemmin, eli milloin täydellinen graafi K_m on jonkin graafin tai sen komplementin aligraafi.

Ramseyn luku $r(m,n)$ on pienin sellainen luku, että jos G on $r(m,n)$-solmuinen graafi, niin joko K_m on graafin G aligraafi tai K_n on graafin G komplementin aligraafi.

Lause 1.4

Olkoon G vähintään kuusisolmuinen graafi. Tällöin täydellinen 3-solmuinen graafi K_3 on joko graafin G tai sen komplementin $\overline{G}$ aligraafi.

Lauseen 1.4 ongelmaa voidaan tarkastella myös yleisemmin, eli milloin täydellinen graafi K_m on jonkin graafin tai sen komplementin aligraafi.

Ramseyn luku $r(m,n)$ on pienin sellainen luku, että jos G on $r(m,n)$-solmuinen graafi, niin joko K_m on graafin G aligraafi tai K_n on graafin G komplementin aligraafi.

Koska $G = \overline{\overline{G}}$, niin $r(m,n) = r(n,m)$. Selvästikin $r(1,n) = r(m,1) = 1$, $r(2,n) = n$ ja $r(m,2) = m$. Lauseen 1.4 nojalla taas $r(3,3) \leq 6$.

Tunnetut luvut esitetään taulukossa 1.1. Voidaan kuitenkin osoittaa, että

$$r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}.$$

$n \setminus m$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				

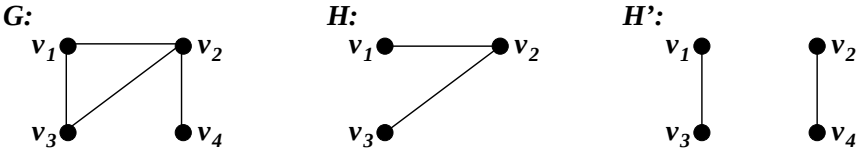
Taulukko 1.1. Joitakin Ramseyn lukuja $r(m,n)$.

Määritelmä 1.30

Olkoon $H = (W, F)$ yksinkertaisen graafin $G = (V, E)$ aligraafi. Tällöin graafia $(V, E \setminus F)$ sanotaan *graafin H komplementiksi graafin G suhteen*.

Määritelmä 1.30
Olkoon $H = (W, F)$ yksinkertaisen graafin $G = (V, E)$ aligraafi. Tällöin graafia $(V, E \setminus F)$ sanotaan *graafin H komplementiksi graafin G suhteen*.

Tavallinen n-solmuisen yksinkertaisen graafin komplementti on siis komplementti täydellisen graafin K_n suhteen.

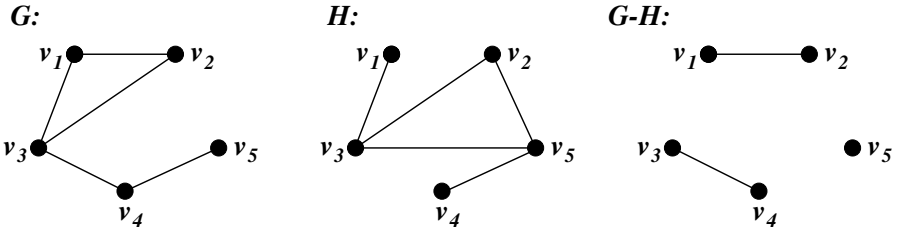


Kuva 1.24. Graafi H' on graafin H komplementti graafin G suhteen.

1.7 Graafioperaatioita

Määritelmä 1.31

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ sellaisia yksinkertaisia graafeja, että $W \subseteq V$. Tällöin graafien G ja H *erotus* $G - H = (V, E \setminus F)$.

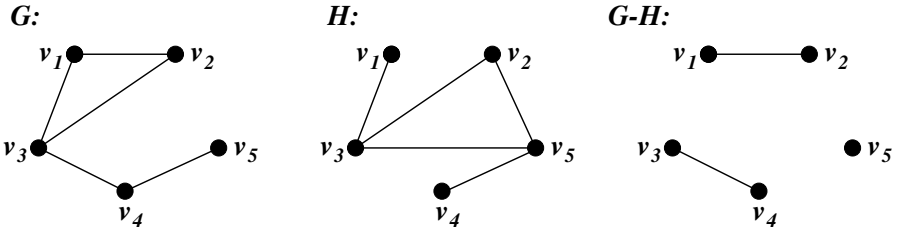


Kuva 1.25. Graafit G ja H sekä niiden erotus $G - H$.

1.7 Graafioperaatioita

Määritelmä 1.31

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ sellaisia yksinkertaisia graafeja, että $W \subseteq V$. Tällöin graafien G ja H *erotus* $G - H = (V, E \setminus F)$.



Kuva 1.25. Graafit G ja H sekä niiden erotus $G - H$.

Erotus yleistää siis määritelmän 1.30 myös tapaukseen, jossa H ei ole graafin G aligraafi (mutta kylläkin $W \subseteq V$). Jos H on graafin G aligraafi, niin $G - H$ on graafin H komplementti graafin G suhteen.

Määritelmä 1.32

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ yksinkertaisia graafeja. Lisäksi kohdassa (b) oletetaan, että $V \cap W \neq \emptyset$, ja kohdassa (c), että $E \neq F$. Tällöin graafien G ja H

(a) *unioni* (eli *yhdiste*) $G \cup H$ on graafi $(V \cup W, E \cup F)$,

Määritelmä 1.32

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ yksinkertaisia graafeja. Lisäksi kohdassa (b) oletetaan, että $V \cap W \neq \emptyset$, ja kohdassa (c), että $E \neq F$. Tällöin graafien G ja H

(a) *unioni* (eli *yhdiste*) $G \cup H$ on graafi $(V \cup W, E \cup F)$,

(b) *leikkaus* $G \cap H$ on graafi $(V \cap W, E \cap F)$,

Määritelmä 1.32

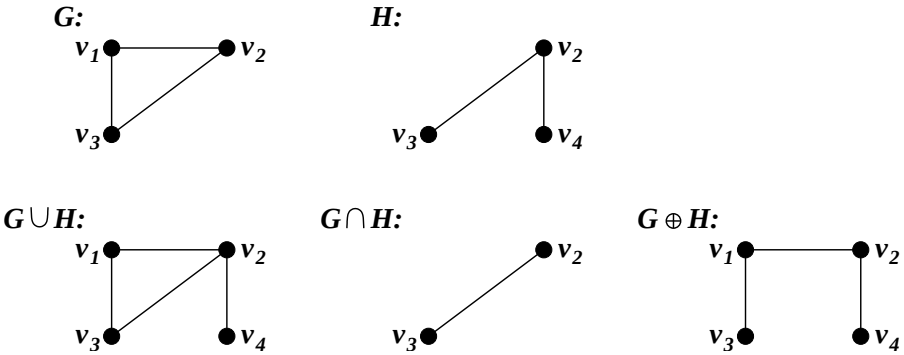
Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ yksinkertaisia graafeja. Lisäksi kohdassa (b) oletetaan, että $V \cap W \neq \emptyset$, ja kohdassa (c), että $E \neq F$. Tällöin graafien G ja H

(a) *unioni* (eli *yhdiste*) $G \cup H$ on graafi $(V \cup W, E \cup F)$,

(b) *leikkaus* $G \cap H$ on graafi $(V \cap W, E \cap F)$,

(c) *rengassumma* $G \oplus H$ on särmäjoukon $E \oplus F$ indusoima graafin $G \cup H$ aligraafi. Joukko-operaatiolla $\oplus$ tarkoitetaan tässä *symmetristä erotusta*, toisin sanoen

$$E \oplus F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$



Kuva 1.26. Graafit G ja H sekä niiden unioni, leikkaus ja rengassumma.

Operaatiot, kuten myös erotus, voidaan yleistää multigraafeille ottamalla huomioon särmien moninkertaisuudet.

Jos solmujoukot V ja W ovat erillisiä, leikkausta ei voida määritellä, koska graafissa solmujoukko ei voi olla tyhjä. Vastaavasti rengassummaa ei voida määritellä, jos $E = F$. Jos kuitenkin graafin määritelmää laajennettaisiin niin, että nollagraafia pidettäisiin graafina, kumpikin operaatio olisi mahdollinen.

Määritelmän 1.32 operaatiot ovat kahden graafin välisiä operaatioita. Kaikki kolme operaatiota ovat vaihdannaisia ja liitännäisiä.

Määritelmä 1.33 (solmun poisto)

Jos v on vähintään kaksisolmuisen graafin $G = (V, E)$ solmu, niin $G - v$ on solmujoukon $V \setminus \{v\}$ indusoima graafin G aligraafi.

Määritelmä 1.33 (solmun poisto)

Jos v on vähintään kaksisolmuisen graafin $G = (V, E)$ solmu, niin $G - v$ on solmujoukon $V \setminus \{v\}$ indusoima graafin G aligraafi.

Määritelmä 1.34 (särmän poisto)

Jos e on graafin $G = (V, E)$ särmä, niin $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Määritelmä 1.33 (solmun poisto)

Jos v on vähintään kaksisolmuisen graafin $G = (V, E)$ solmu, niin $G - v$ on solmujoukon $V \setminus \{v\}$ indusoima graafin G aligraafi.

Määritelmä 1.34 (särmän poisto)

Jos e on graafin $G = (V, E)$ särmä, niin $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Määritelmä 1.35 (särmän lisäys)

Jos u ja v ovat graafin $G = (V, E)$ solmuja ja $e = \{u, v\}$, niin $G + e = (V, E \cup \{e\})$.

Määritelmä 1.33 (solmun poisto)

Jos v on vähintään kaksisolmuisen graafin $G = (V, E)$ solmu, niin $G - v$ on solmujoukon $V \setminus \{v\}$ indusoima graafin G aligraafi.

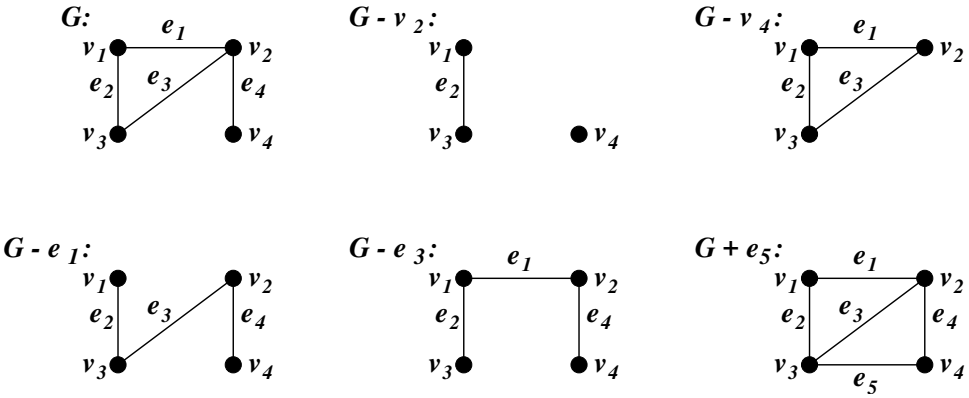
Määritelmä 1.34 (särmän poisto)

Jos e on graafin $G = (V, E)$ särmä, niin $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Määritelmä 1.35 (särmän lisäys)

Jos u ja v ovat graafin $G = (V, E)$ solmuja ja $e = \{u, v\}$, niin $G + e = (V, E \cup \{e\})$.

Koska useampia solmuja tai särmiä poistettaessa (lisättäessä) poistamisjärjestyksellä (lisäämisjärjestyksellä) ei ole merkitystä, merkintöjä $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ja $G - \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ($G + \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$) voidaan käyttää tarkoittamaan, että solmuja tai särmiä poistetaan (lisätään) useampia.



Kuva 1.27. Muutama yhteen graafiin liittyvä operaatio.

Määritelmä 1.36

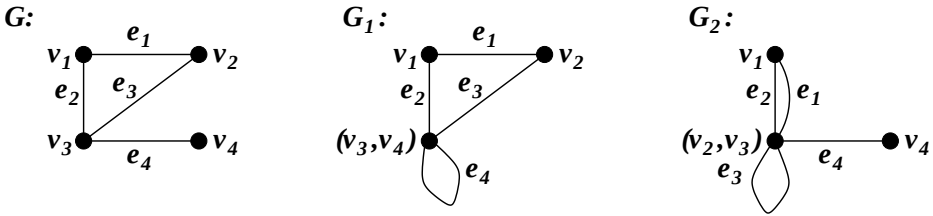
Graafin G solmujen u ja v *yhdistämisellä* tarkoitetaan operaatiota, jossa solmut u ja v korvataan uudella solmulla w ja kaikki solmujen u ja v kautta kulkevat särmät asetetaan kulkemaan solmun w kautta.

Määritelmä 1.36
Graafin G solmujen u ja v *yhdistämisellä* tarkoitetaan operaatiota, jossa solmut u ja v korvataan uudella solmulla w ja kaikki solmujen u ja v kautta kulkevat särmät asetetaan kulkemaan solmun w kautta.

Määritelmä 1.37
Särmän *kutistamisella* tarkoitetaan operaatiota, jossa särmä ensin poistetaan ja sitten sen päätesolmut yhdistetään. Graafi G on *kutistettavissa* graafiksi H, jos H saadaan graafista G peräkkäisillä särmien kutistusoperaatioilla.

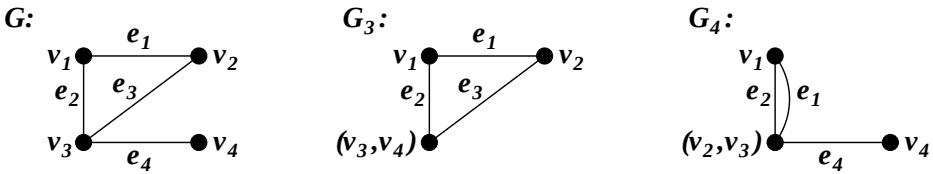
Esimerkki 1.12

Graafi G_1 on saatu graafista G yhdistämällä solmut v_3 ja v_4 ja graafi G_2 yhdistämällä solmut v_2 ja v_3.



Kuva 1.28a. Solmujen yhdistäminen.

Graafi G_3 puolestaan on saatu kutistamalla särmä e_4 ja graafi G_4 kutistamalla särmä e_3. Kuten havaitaan, vain tapauksessa G_3 tuloksena oleva graafi on yksinkertainen, vaikka alkuperäinen graafi on yksinkertainen.



Kuva 1.28b. Särmän kutistaminen.

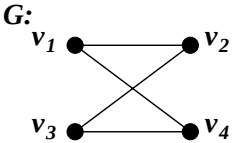
Jos solmujen yhdistäminen ja särmän kutistus rajoitetaan yksinkertaisille graafeille, niin tuloksista poistetaan luupit ja rinnakkaisista särmistä valitaan solmuparia kohti yksi.

1.8 Graafien esittäminen matriisien avulla

Graafi voidaan esittää mm. vierusmatriisin tai tapausmatriisin avulla.

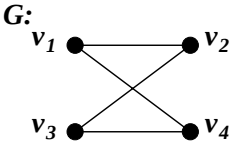
Määritelmä 1.38
Olkoon $G = (V, E)$ yksinkertainen n-solmuinen graafi. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Silloin graafin G *vierusmatriisi* A on $n \times n$ -matriisi, jossa

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } v_i \text{ ja } v_j \text{ ovat vierussolmuja,} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kuva 1.29. Graafi G ja graafin G vierusmatriisi A.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kuva 1.29. Graafi G ja graafin G vierusmatriisi A.

Yksinkertaisen graafin vierusmatriisi on symmetrinen, sen lävistäjäalkiot ovat nollia ja muut alkiot nollia tai ykkösiä.

Määritelmä 1.39

Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton n-solmuinen multigraafi. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Silloin graafin G *vierusmatriisi* A on $n \times n$ -matriisi, jossa

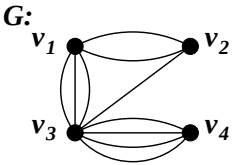
$$a_{ij} = \text{solmujen } v_i \text{ ja } v_j \text{ välillä olevien särmien lukumäärä.}$$

Määritelmä 1.39

Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton n-solmuinen multigraafi. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Silloin graafin G *vierusmatriisi* A on $n \times n$ -matriisi, jossa

$$a_{ij} = \text{solmujen } v_i \text{ ja } v_j \text{ välillä olevien särmien lukumäärä.}$$

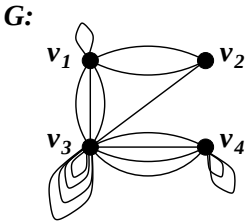
Suuntaamattoman multigraafin vierusmatriisi on symmetrinen ja sen lävistäjäalkiot ovat nollia.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Kuva 1.30. Multigraafi G ja graafin G vierusmatriisi A.

Pseudograafin vierusmatriisi määritellään vastaavasti. Sekin on symmetrinen, mutta sen kaikki lävistäjäalkiot eivät välttämättä ole nollia.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Kuva 1.31. Pseudograafi G ja graafin G vierusmatriisi A.

Määritelmä 1.40

Olkoon $G = (V, E)$ suunnattu n-solmuinen multigraafi. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Silloin graafin G *vierusmatriisi* A on $n \times n$ -matriisi, jossa

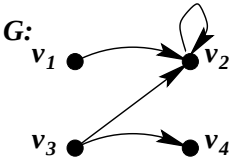
$$a_{ij} = \text{särmien lukumäärä solmusta } v_i \text{ solmuun } v_j.$$

Määritelmä 1.40

Olkoon $G = (V, E)$ suunnattu n-solmuinen multigraafi. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Silloin graafin G *vierusmatriisi* A on $n \times n$ -matriisi, jossa

$$a_{ij} = \text{särmien lukumäärä solmusta } v_i \text{ solmuun } v_j.$$

Suunnatun graafin vierusmatriisi ei välttämättä ole symmetrinen eivätkä sen kaikki lävistäjäalkiot välttämättä ole nollia.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kuva 1.32. Suunnattu graafi G ja graafin G vierusmatriisi A.

Määritelmä 1.41

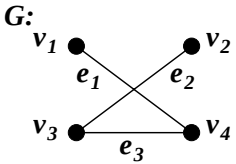
Olkoon $G = (V, E)$ n-solmuinen m-särmäinen suuntaamaton graafi. Merkitään $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Silloin graafin G *tapausmatriisi* C on sellainen $n \times m$ -matriisi, jossa

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos särmä } e_j \text{ kulkee solmun } v_i \text{ kautta,} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritelmä 1.41

Olkoon $G = (V, E)$ n-solmuinen m-särmäinen suuntaamaton graafi. Merkitään $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Silloin graafin G *tapausmatriisi* C on sellainen $n \times m$ -matriisi, jossa

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos särmä } e_j \text{ kulkee solmun } v_i \text{ kautta,} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$



$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kuva 1.33. Suuntaamaton graafi G ja graafin G tapausmatriisi C.

Koska multigraafissa kukin särmä yhdistää kaksi eri solmua, multigraafin tapausmatriisin kunkin pystyrivin alkioiden summa on kaksi. Pseudograafissa pystyrivin summa voi olla myös yksi.

Multigraafin tapausmatriisin vaakarivin alkioiden summa antaa kyseistä vaakariviä vastaavan solmun asteen. Pseudograafin astelukuja laskettaessa on huomioitava, että kukin luuppi lisää tapausmatriisin vaakarivisummaa vain yhdellä.

1.9 Isomorfisuus

Graafit, jotka ovat muuten samoja, paitsi että niiden solmut tai särmät on nimetty erilailla, voidaan usein samastaa. Tällaiset graafit ovat isomorfisia.

Määritelmä 1.42
Olkoot $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ yksinkertaisia graafeja. Silloin graafeja G_1 ja G_2 sanotaan *isomorfisiksi*, jos on olemassa sellainen kuvaus $f : V_1 \to V_2$, että

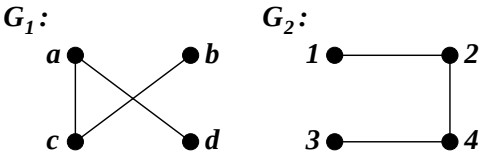
(i) f on bijektio,

(ii) f säilyttää solmujen vierekkyyden, ts. kaikilla $u, v \in V_1$ pätee:
$\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Kuvausta f kutsutaan *isomorfiakuvaukseksi*.

Esimerkki 1.13

Graafit G_1 ja G_2 ovat isomorfiset. Isomorfiakuvaus f on nyt esimerkiksi $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 4$ ja $f(d) = 1$. Selvästikin f on bijektio. Lisäksi f säilyttää solmujen vierekkyyden, sillä graafien G_1 ja G_2 vierusmatriisit ovat samat.

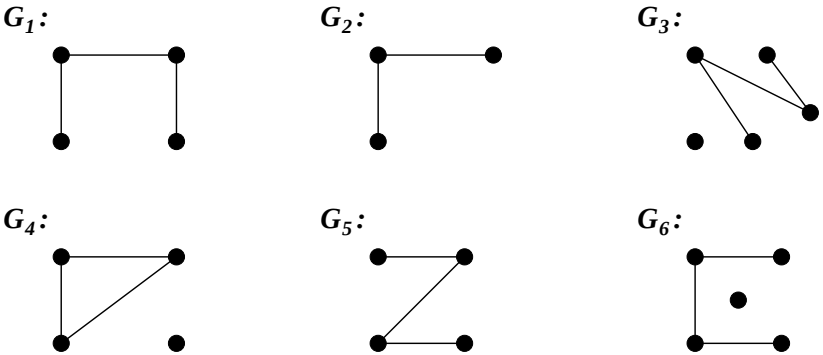


$$A_1 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \end{array} \qquad A_2 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \end{array}$$

Kuva 1.34. Isomorfiset graafit G_1 ja G_2 sekä niiden vierusmatriisit A_1 ja A_2.

Esimerkki 1.14

Graafit G_1 ja G_5 ovat keskenään isomorfisia. Samoin graafit G_3 ja G_6 ovat keskenään isomorfisia. Sen sijaan kolmisolmuinen graafi G_2 sekä graafi G_4, jossa kolmen solmun aste on 2, eivät ole kuvan 1.35 minkään muun graafin kanssa isomorfisia.



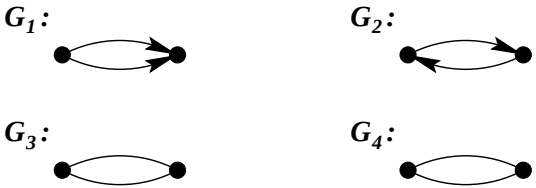
Kuva 1.35. Yksinkertaisia graafeja.

Multigraafien, pseudograafien ja suunnattujen graafien isomorfisuus määritellään samaan tapaan. Vierekkyyden säilyminen edellyttää lisäksi, että isomorfiakuvauksessa f myös särmien moninkertaisuus/suunta säilyy.

Multigraafien, pseudograafien ja suunnattujen graafien isomorfisuus määritellään samaan tapaan. Vierekkyyden säilyminen edellyttää lisäksi, että isomorfiakuvauksessa f myös särmien moninkertaisuus/suunta säilyy.

Esimerkki 1.15

Graafit G_1 ja G_2 eivät ole isomorfisia, koska solmuilla on eri tuloasteet. Sen sijaan vastaavat suuntaamattomat graafit G_3 ja G_4 ovat isomorfisia.



Kuva 1.36. Kaksisolmuisia ja kaksisärmäisiä graafeja.