Johdatus graafiteoriaan

Syksy 2017

Lauri Hella

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta

Luku 2
Yhtenäisyys

2.1 Polku
2.2 Lyhin painotettu polku
2.3 Yhtenäinen graafi
2.4 Komponentti
2.5 Aste ja nulliteetti
2.6 Irrotussolmu ja lohko
2.7 Irrotus ja irrotusjoukko
2.8 Yhtenäisyysaste
2.9 Särmäyhtenäisyys
2.10 Mengerin lause

2.1 Polku

Intuitiivisella tasolla yhtenäisellä graafilla tarkoitetaan graafia, jonka kaikki solmut ovat jollakin tavalla yhdistetyt toisiinsa särmiä käyttäen.

Määritelmä 2.1
Polku eli *reitti* suuntaamattoman graafin G solmusta u solmuun v on äärellinen jono

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_m, v_m = v,$$

jossa on vuorotellen graafin G solmuja ja särmiä siten, että e_k on solmujen v_{k-1} ja v_k välinen särmä. Solmu u on polun *alkusolmu* ja v polun *loppusolmu*.

Polulle solmusta u solmuun v voidaan käyttää merkintää

$$p : u \to v.$$

Koska särmien päätesolmut ovat yksikäsitteiset, polku voidaan antaa myös pelkästään särmäjonona. Yksinkertaisessa graafissa polku voidaan antaa myös pelkästään solmujonona. Tällöin polulle voidaan käyttää merkintää

$$p : v_0, v_1, \ldots, v_m.$$

Polulle solmusta u solmuun v voidaan käyttää merkintää

$$p : u \to v.$$

Koska särmien päätesolmut ovat yksikäsitteiset, polku voidaan antaa myös pelkästään särmäjonona. Yksinkertaisessa graafissa polku voidaan antaa myös pelkästään solmujonona. Tällöin polulle voidaan käyttää merkintää

$$p : v_0, v_1, \ldots, v_m.$$

Määritelmä 2.2

Polun *pituus* on sen särmien lukumäärä. Painotetun graafin polun pituus on polun särmien painojen summa.

Polulle solmusta u solmuun v voidaan käyttää merkintää

$$p : u \to v.$$

Koska särmien päätesolmut ovat yksikäsitteiset, polku voidaan antaa myös pelkästään särmäjonona. Yksinkertaisessa graafissa polku voidaan antaa myös pelkästään solmujonona. Tällöin polulle voidaan käyttää merkintää

$$p : v_0, v_1, \ldots, v_m.$$

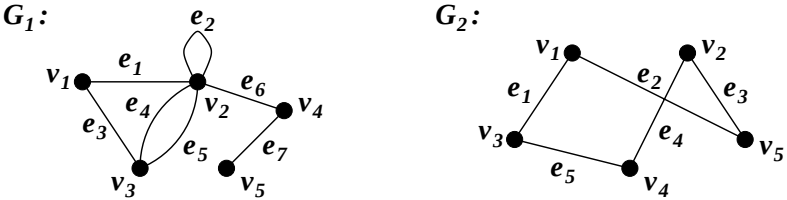
Määritelmä 2.2

Polun *pituus* on sen särmien lukumäärä. Painotetun graafin polun pituus on polun särmien painojen summa.

Tyhjä polku on polku, jonka pituus on nolla. Kyseinen polku on siis vain solmu, joka on sekä polun alku- että loppusolmu.

Esimerkki 2.1

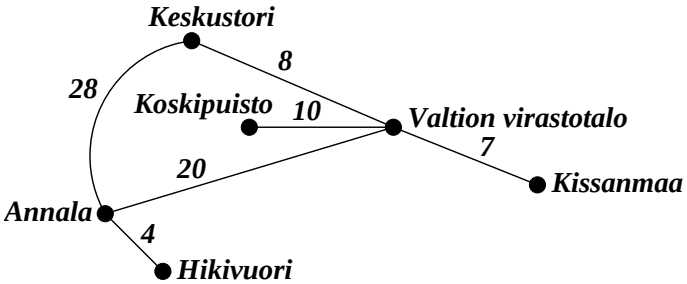
Graafeissa G_1 ja G_2 on molemmissa polku $v_1 \to v_5$. Esimerkiksi graafissa G_1 jono $v_1, e_1, v_2, e_2, v_2, e_4, v_3, e_3, v_1, e_3, v_3, e_5, v_2, e_6, v_4, e_7, v_5, e_7, v_4, e_7, v_5$ on polku $v_1 \to v_5$, jonka pituus on 10. Graafissa G_2 solmujono $v_1, v_3, v_4, v_2, v_5, v_1, v_3, v_1, v_5$ on polku $v_1 \to v_5$, jonka pituus on 8.



Kuva 2.1. Yksinkertaiset graafit G_1 ja G_2.

Esimerkki 2.2

Polun Kissanmaa → Hikivuori pituus on 47, kun kyseessä on polku Kissanmaa, Valtion virastotalo, Keskustori, Annala, Hikivuori, ja 31, kun kyseessä on polku Kissanmaa, Valtion virastotalo, Annala, Hikivuori.



Kuva 2.2. Linja-auton matka-aika minuutteina joidenkin pysäkkien välillä.

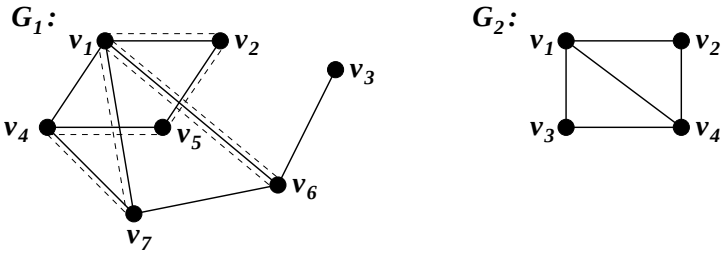
Määritelmä 2.3

Polku on *piiri*, jos sen alku- ja loppusolmu ovat samat ja siinä on vähintään yksi särmä. Polku tai piiri on *yksinkertainen*, jos jokaista särmää käytetään korkeintaan kerran. Polku on *suora*, jos mikään solmu ei esiinny siinä kahta kertaa. *Silmukka* on yksinkertainen piiri, jossa mikään solmu ei esiinny kahta kertaa muuten kuin päätesolmuna.

Suora polku on aina myös yksinkertainen polku. Erityisesti on syytä huomata, että tyhjä polku on aina suora polku.

Esimerkki 2.3

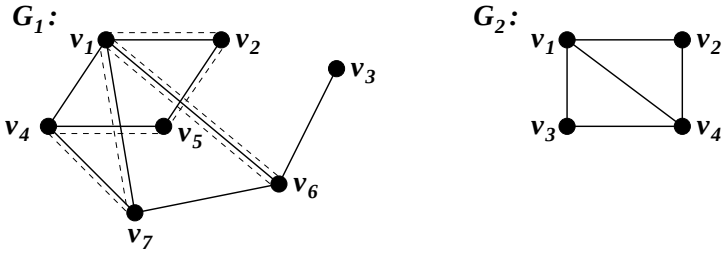
Graafissa G_1 on piiri $v_1, v_2, v_5, v_4, v_7, v_1, v_6, v_1$. Yksinkertaisia polkuja ovat esimerkiksi solmujonot v_1 ja v_1, v_4, v_7. Solmujono v_1, v_7, v_6, v_1 puolestaan on yksinkertainen piiri.



Kuva 2.3. Yksinkertaiset graafit G_1 ja G_2.

Esimerkki 2.4

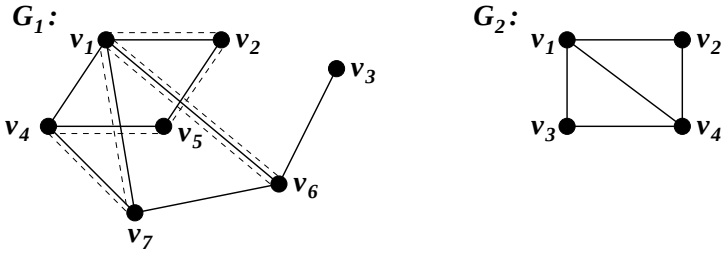
Graafissa G_2 solmusta v_1 solmuun v_4 on kolme suoraa polkua, nimittäin polku v_1, v_4, polku v_1, v_2, v_4 ja polku v_1, v_3, v_4. Suora polku ei siis tarkoita mahdollisimman lyhyttä polkua.



Kuva 2.3. Yksinkertaiset graafit G_1 ja G_2.

Esimerkki 2.4

Graafissa G_2 solmusta v_1 solmuun v_4 on kolme suoraa polkua, nimittäin polku v_1, v_4, polku v_1, v_2, v_4 ja polku v_1, v_3, v_4. Suora polku ei siis tarkoita mahdollisimman lyhyttä polkua.



Kuva 2.3. Yksinkertaiset graafit G_1 ja G_2.

Esimerkki 2.5

Graafissa G_2 piiri v_1, v_2, v_4, v_1 on silmukka, mutta piiri v_1, v_2, v_1 ei ole silmukka.

Jatkossa ehto ”piirissä ei esiinny sama solmu kahdesti” tarkoittaa, että se ei esiinny kahdesti paitsi päätesolmuna.

Silmukka on nyt määritelty kahdella tavalla (määritelmä 1.21 ja määritelmä 2.3). Kun lasketaan silmukan solmujen lukumäärää, tarkoitetaan yleensä määritelmän 1.21 mukaista silmukkaa eli alku/loppu -solmua ei lasketa kahdesti. Ainoastaan, jos on korostetusti kyse silmukasta polkuna, alku/loppu -solmu lasketaan kahdesti.

Määritelmä 2.4

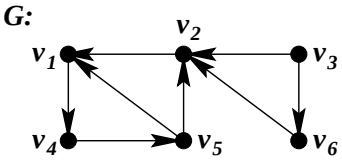
Suunnatussa graafissa polku (ja sen erikoistapaukset) määritellään samoin kuin suuntaamattomassakin, mutta särmiä voi kulkea vain niiden suunnan mukaisesti.

Määritelmä 2.4

Suunnatussa graafissa polku (ja sen erikoistapaukset) määritellään samoin kuin suuntaamattomassakin, mutta särmiä voi kulkea vain niiden suunnan mukaisesti.

Esimerkki 2.6

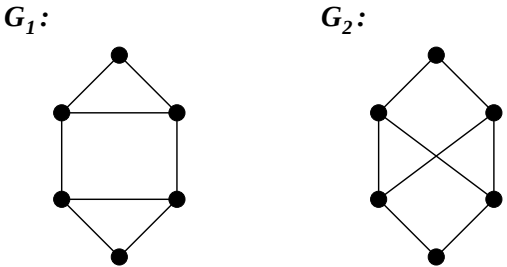
Graafissa G on suunnattu polku $v_3, v_6, v_2, v_1, v_4, v_5, v_2, v_1$, yksinkertainen polku $v_3, v_6, v_2, v_1, v_4, v_5, v_1$, suora polku v_3, v_6, v_2, v_1, piiri $v_2, v_1, v_4, v_5, v_1, v_4, v_5, v_2$ ja silmukka v_1, v_4, v_5, v_1.



Kuva 2.4. Suunnattu graafi G.

Esimerkki 2.7

Polkuja ja piirejä voidaan hyödyntää isomorfisuuden tutkimisessa. Graafeissa G_1 ja G_2 on yhtä monta solmua ja särmää. Lisäksi kummassakin graafissa neljän solmun aste on 3 ja kahden solmun aste on 2. Graafit eivät kuitenkaan ole isomorfiset, sillä graafista G_1 löytyy kolmisärmäinen silmukka, mutta graafissa G_2 tällaista silmukkaa ei ole.



Kuva 2.5. Graafit G_1 ja G_2 eivät ole isomorfiset.

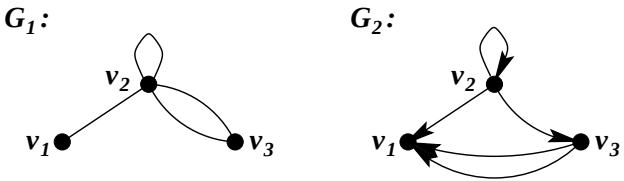
Lause 2.1

Olkoon G suunnattu tai suuntaamaton graafi, jonka vierusmatriisi on A solmujen järjestyksen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ suhteen. Silloin matriisin A^r alkio $[A^r]_{ij}$ antaa graafin G r-särmäisten polkujen lukumäärän solmusta v_i solmuun v_j.

Esimerkki 2.8

Kuvan 2.6 pseudograafin G_1 yksi-, kaksi- ja kolmisärmäisten polkujen lukumäärät eri solmujen välillä saadaan kätevästi lauseen 2.1 mukaan laskemalla vierusmatriisi A ja sen potenssit A^2 ja A^3. Siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 6 & 11 & 12 \\ 2 & 12 & 4 \end{pmatrix}.$$



Kuva 2.6. Pseudograafi G_1 ja suunnattu multigraafi G_2.

Esimerkki 2.9

Lausetta 2.1 voidaan soveltaa myös suunnatuille graafeille. Niinpä kuvan 2.6 suunnatun multigraafin G_2 yksi-, kaksi- ja kolmisärmäisten polkujen lukumäärät eri solmujen välillä saadaan nytkin laskemalla vierusmatriisi A ja sen potenssit A^2 ja A^3. Siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuten matriiseista A^2 ja A^3 havaitaan, kahden tai useamman särmän mittaisia polkuja on vain solmusta v_2 muihin solmuihin. Lisäksi polkujen lukumäärä pysyy samana polkujen pituuden kasvaessa.

Lause 2.2

Jos graafissa on polku solmusta u solmuun v, graafissa on myös suora polku solmusta u solmuun v.

Lause 2.2

Jos graafissa on polku solmusta u solmuun v, graafissa on myös suora polku solmusta u solmuun v.

Lause 2.3

Jos graafissa on yksinkertainen piiri, siinä on myös silmukka.

Lause 2.2
Jos graafissa on polku solmusta u solmuun v, graafissa on myös suora polku solmusta u solmuun v.

Lause 2.3
Jos graafissa on yksinkertainen piiri, siinä on myös silmukka.

Määritelmä 2.5
Graafi on *silmukaton*, jos siinä ei ole yhtään silmukkaa.

Lause 2.2
Jos graafissa on polku solmusta u solmuun v, graafissa on myös suora polku solmusta u solmuun v.

Lause 2.3
Jos graafissa on yksinkertainen piiri, siinä on myös silmukka.

Määritelmä 2.5
Graafi on *silmukaton*, jos siinä ei ole yhtään silmukkaa.

Lause 2.4
Graafi on silmukaton täsmälleen silloin, kun siinä ei ole luuppeja ja minkään kahden solmun välillä ei ole kahta eri suoraa polkua.

2.2 Lyhin painotettu polku

Lyhimmän painotetun polun etsiminen painotetusta graafista on yksi algoritmisen graafiteorian klassisista ongelmista. Tämä ongelma voidaan ratkaista tehokkaasti *Dijkstran algoritmilla*.

Luentomonisteessa Dijkstran algoritmi esitellään sivuilla 35–36. Luennolla algoritmi käydään läpi alla olevan verkkosivun mukaan:

https://brilliant.org/wiki/dijkstras-short-path-finder/

Lause 2.5
Dijkstran algoritmi tuottaa lyhimmän kahden solmun välisen painotetun polun.

Lyhin polku kahden solmun välillä ei välttämättä ole yksikäsitteinen.

2.3 Yhtenäinen graafi

Määritelmä 2.6

Kaksi graafin solmua ovat *yhdistetyt*, jos niiden välillä on polku.

2.3 Yhtenäinen graafi

Määritelmä 2.6

Kaksi graafin solmua ovat *yhdistetyt*, jos niiden välillä on polku.

Määritelmä 2.7

Suuntaamaton graafi on *yhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi solmua ovat yhdistetyt.

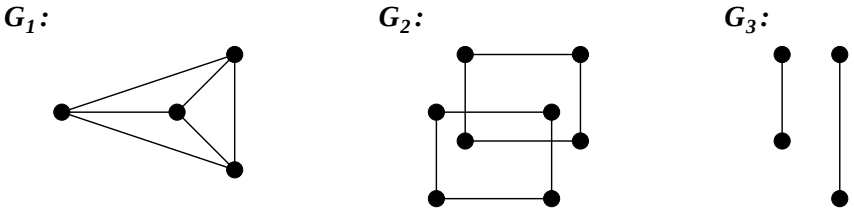
2.3 Yhtenäinen graafi

Määritelmä 2.6

Kaksi graafin solmua ovat *yhdistetyt*, jos niiden välillä on polku.

Määritelmä 2.7

Suuntaamaton graafi on *yhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi solmua ovat yhdistetyt.



Kuva 2.7. Graafi G_1 on yhtenäinen, graafit G_2 ja G_3 epäyhtenäisiä.

Jokainen solmu on yhdistetty itseensä tyhjän polun kautta. Yhtenäisessä suuntaamattomassa graafissa jokaisen kahden solmun välillä on suora polku.

Jokainen solmu on yhdistetty itseensä tyhjän polun kautta. Yhtenäisessä suuntaamattomassa graafissa jokaisen kahden solmun välillä on suora polku.

Määritelmä 2.8

Suunnattu graafi on *heikosti yhtenäinen*, jos vastaava suuntaamaton graafi on yhtenäinen.

Jokainen solmu on yhdistetty itseensä tyhjän polun kautta. Yhtenäisessä suuntaamattomassa graafissa jokaisen kahden solmun välillä on suora polku.

Määritelmä 2.8

Suunnattu graafi on *heikosti yhtenäinen*, jos vastaava suuntaamaton graafi on yhtenäinen.

Määritelmä 2.9

Suunnattu graafi on *vahvasti yhtenäinen*, jos graafin jokaisen kahden solmun u ja v välillä on polku sekä solmusta u solmuun v että solmusta v solmuun u.

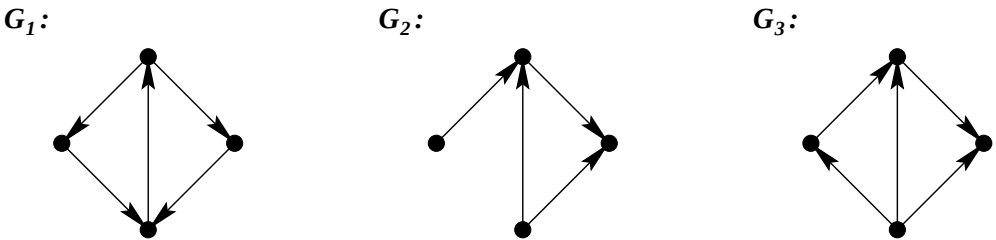
Jokainen solmu on yhdistetty itseensä tyhjän polun kautta. Yhtenäisessä suuntaamattomassa graafissa jokaisen kahden solmun välillä on suora polku.

Määritelmä 2.8
Suunnattu graafi on *heikosti yhtenäinen*, jos vastaava suuntaamaton graafi on yhtenäinen.

Määritelmä 2.9
Suunnattu graafi on *vahvasti yhtenäinen*, jos graafin jokaisen kahden solmun u ja v välillä on polku sekä solmusta u solmuun v että solmusta v solmuun u.

Määritelmä 2.10
Suunnattu graafi on *kvasivahvasti yhtenäinen*, jos graafin jokaista kahta solmua u ja v kohti löytyy sellainen graafin solmu w, että solmusta w on suunnattu polku sekä solmuun u että solmuun v.

Selvästikin vahvasti yhtenäinen graafi on myös kvasivahvasti yhtenäinen ja edelleen kvasivahvasti yhtenäinen graafi on samalla heikosti yhtenäinen.



Kuva 2.8. Graafi G_1 on vahvasti yhtenäinen graafi, graafi G_2 on heikosti yhtenäinen graafi ja graafi G_3 on kvasivahvasti yhtenäinen graafi.

Lause 2.6

Olkoon G jokin n-solmuinen yksinkertainen graafi. Jos graafin G minimiaste

$$\delta(G) \geq \frac{1}{2}(n-1),$$

niin G on yhtenäinen.

Lause 2.6

Olkoon G jokin n-solmuinen yksinkertainen graafi. Jos graafin G minimiaste

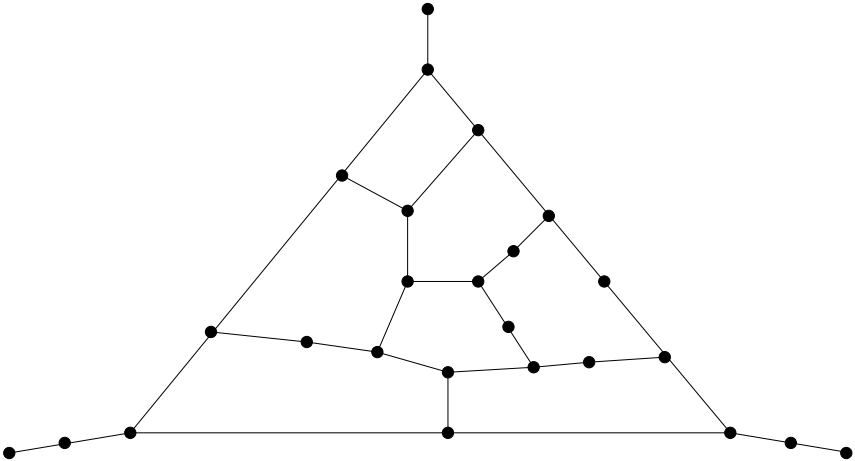
$$\delta(G) \geq \frac{1}{2}(n-1),$$

niin G on yhtenäinen.

Lause 2.7

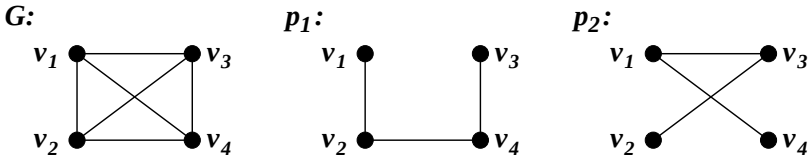
Olkoon G yhtenäinen suuntaamaton graafi ja k sen suorien polkujen suurin pituus. Tällöin jokaisella kahdella graafin G k-särmäisellä suoralla polulla on ainakin yksi yhteinen solmu.

Graafissa ei kuitenkaan välttämättä ole solmua, joka olisi yhteinen kaikille sen pisimmille suorille poluille (ks. kuva 2.9).



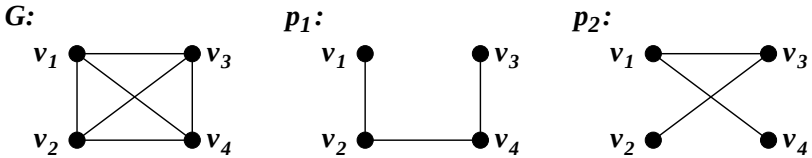
Kuva 2.9. Waltherin esittämä graafi, jossa mikään graafin solmu ei ole yhteinen graafin kaikille pisimmille poluille.

Myöskään pisimmillä suorilla poluilla ei välttämättä ole yhteisiä särmiä (ks. kuva 2.10).



Kuva 2.10. Graafin G pisimmillä suorilla poluilla p_1 ja p_2 ei ole yhteisiä särmiä.

Myöskään pisimmillä suorilla poluilla ei välttämättä ole yhteisiä särmiä (ks. kuva 2.10).



Kuva 2.10. Graafin G pisimmillä suorilla poluilla p_1 ja p_2 ei ole yhteisiä särmiä.

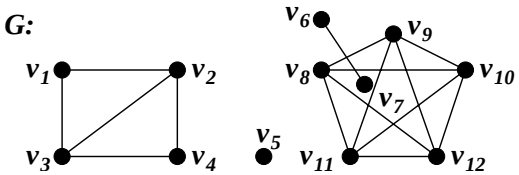
Lause 2.8

Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi. Jos $e \in E$ on graafin G jonkin silmukan särmä, myös graafi $G - e$ on yhtenäinen.

2.4 Komponentti

Epäyhtenäinen graafi koostuu useasta graafin yhtenäisestä aligraafista (eli komponentista).

Määritelmä 2.11
Graafin maksimaalinen yhtenäinen aligraafi on graafin *komponentti*.



Kuva 2.11. Graafissa G on neljä komponenttia.

Graafin komponentti ei ole graafin minkään yhtenäisen aligraafin aito aligraafi. Yhtenäisellä graafilla on vain yksi komponentti, graafi itse; epäyhtenäisellä graafilla on useita komponentteja. Eristetty solmu muodostaa yksinään graafin yhden komponentin. Särmän poistaminen lisää graafin komponenttien määrää enintään yhdellä.

Graafin komponentti ei ole graafin minkään yhtenäisen aligraafin aito aligraafi. Yhtenäisellä graafilla on vain yksi komponentti, graafi itse; epäyhtenäisellä graafilla on useita komponentteja. Eristetty solmu muodostaa yksinään graafin yhden komponentin. Särmän poistaminen lisää graafin komponenttien määrää enintään yhdellä.

Lause 2.9

Jos graafin G solmu v on yhdistetty johonkin graafin G komponentin H solmuun, niin v on komponentin H solmu.

Graafin komponentti ei ole graafin minkään yhtenäisen aligraafin aito aligraafi. Yhtenäisellä graafilla on vain yksi komponentti, graafi itse; epäyhtenäisellä graafilla on useita komponentteja. Eristetty solmu muodostaa yksinään graafin yhden komponentin. Särmän poistaminen lisää graafin komponenttien määrää enintään yhdellä.

Lause 2.9

Jos graafin G solmu v on yhdistetty johonkin graafin G komponentin H solmuun, niin v on komponentin H solmu.

Lause 2.10

Jokainen graafin G solmu kuuluu täsmälleen yhteen graafin G komponenttiin. Samoin jokainen graafin G särmä kuuluu täsmälleen yhteen graafin G komponenttiin.

Graafin komponentti ei ole graafin minkään yhtenäisen aligraafin aito aligraafi. Yhtenäisellä graafilla on vain yksi komponentti, graafi itse; epäyhtenäisellä graafilla on useita komponentteja. Eristetty solmu muodostaa yksinään graafin yhden komponentin. Särmän poistaminen lisää graafin komponenttien määrää enintään yhdellä.

Lause 2.9

Jos graafin G solmu v on yhdistetty johonkin graafin G komponentin H solmuun, niin v on komponentin H solmu.

Lause 2.10

Jokainen graafin G solmu kuuluu täsmälleen yhteen graafin G komponenttiin. Samoin jokainen graafin G särmä kuuluu täsmälleen yhteen graafin G komponenttiin.

Komponenttien solmujoukot muodostavat graafin solmujoukon luokkajaon.

2.5 Aste ja nulliteetti

Määritelmä 2.12
Olkoon G graafi, jossa on n solmua, m särmää ja k komponenttia. Tällöin graafin G *aste* on

$$\rho(G) = n - k$$

ja graafin G *nulliteetti* on

$$\mu(G) = m - n + k.$$

2.5 Aste ja nulliteetti

Määritelmä 2.12
Olkoon G graafi, jossa on n solmua, m särmää ja k komponenttia. Tällöin graafin G *aste* on

$$\rho(G) = n - k$$

ja graafin G *nulliteetti* on

$$\mu(G) = m - n + k.$$

Selvästikin aina $\rho(G) \geq 0$ ja $\rho(G) + \mu(G) = m$.

G	$n-k=\rho(G)$	$m-\rho(G)=\mu(G)$
	$1-1=0$	$0-0=0$
	$2-2=0$	$0-0=0$
	$2-1=1$	$1-1=0$
	$3-3=0$	$0-0=0$
	$3-2=1$	$1-1=0$
	$3-1=2$	$2-2=0$
	$3-1=2$	$3-2=1$
	$4-1=3$	$4-3=1$
	$4-1=3$	$6-3=3$

Taulukko 2.1. Joidenkin graafien asteet ja nulliteetit.

Lause 2.11

Olkoon G jokin m-särmäinen graafi. Tällöin $\rho(G) \leq m$.

Lause 2.11
Olkoon G jokin m-särmäinen graafi. Tällöin $\rho(G) \leq m$.

Lauseen 2.11 perusteella myöskin nulliteetille pätee $\mu(G) \geq 0$.

2.6 Irrotussolmu ja lohko

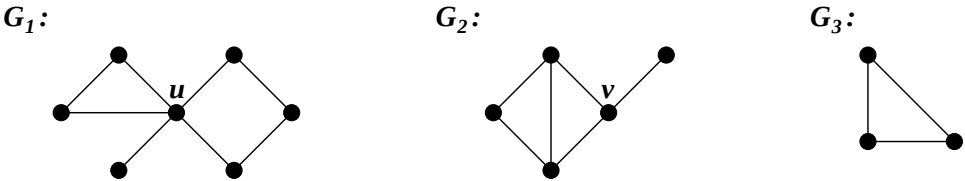
Sovelluksissa graafin yhtenäisyys on melko yleinen vaatimus. Joskus tämäkään ei kuitenkaan riitä vaan tarpeen on tietää, pysyykö graafi yhtenäisenä, jos siitä poistetaan yksi solmu.

2.6 Irrotussolmu ja lohko

Sovelluksissa graafin yhtenäisyys on melko yleinen vaatimus. Joskus tämäkään ei kuitenkaan riitä vaan tarpeen on tietää, pysyykö graafi yhtenäisenä, jos siitä poistetaan yksi solmu.

Määritelmä 2.13

Graafin G solmu v on graafin G *irrotussolmu*, jos graafissa $G - v$ on enemmän komponentteja kuin graafissa G.



Kuva 2.12. Solmu u on graafin G_1 irrotussolmu ja solmu v on graafin G_2 irrotussolmu. Graafissa G_3 ei ole irrotussolmua.

Eristetty solmu ei ole irrotussolmu, sillä eristetyn solmun poistaminen graafista vähentää graafin komponenttien lukumäärää.

Eristetty solmu ei ole irrotussolmu, sillä eristetyn solmun poistaminen graafista vähentää graafin komponenttien lukumäärää.

Lause 2.12

Jos v on graafin G irrotussolmu, niin $G - v$ ei ole yhtenäinen.

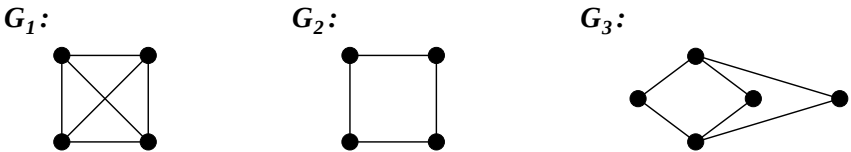
Eristetty solmu ei ole irrotussolmu, sillä eristetyn solmun poistaminen graafista vähentää graafin komponenttien lukumäärää.

Lause 2.12

Jos v on graafin G irrotussolmu, niin $G - v$ ei ole yhtenäinen.

Määritelmä 2.14

Graafi on *separoituva*, jos se on epäyhtenäinen tai sillä on ainakin yksi irrotussolmu. Muussa tapauksessa graafi on *separoitumaton*.



Kuva 2.13. Separoitumattomia graafeja.

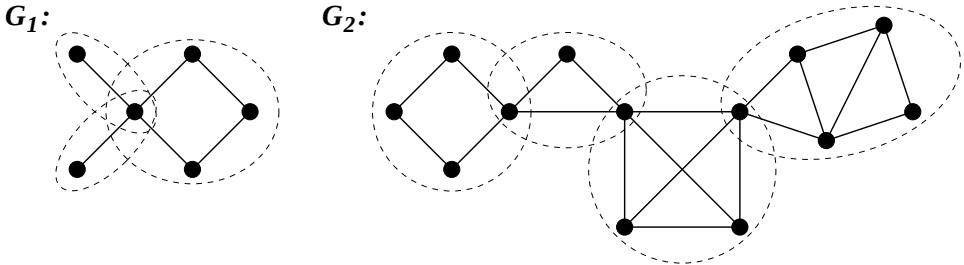
Määritelmä 2.15

Graafin maksimaalinen separoitumaton aligraafi on graafin *lohko*.

Määritelmä 2.15

Graafin maksimaalinen separoitumaton aligraafi on graafin *lohko*.

Graafin G aligraafi H on siis graafin G lohko, jos (i) H on separoitumaton ja (ii) aina, kun F on graafin G aligraafi, joko F on graafin H aligraafi tai $H \cup F$ on separoituva. Separoitumattomalla graafilla on vain yksi lohko, graafi itse.



Kuva 2.14. Graafissa G_1 on kolme lohkoa ja graafissa G_2 on neljä lohkoa.

Lause 2.13

Graafin jokainen särmä kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Lause 2.13

Graafin jokainen särmä kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Lause 2.14

Graafin jokainen separoitumaton aligraafi on jonkin lohkon aligraafi.

Lause 2.13
Graafin jokainen särmä kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Lause 2.14
Graafin jokainen separoitumaton aligraafi on jonkin lohkon aligraafi.

Seuraus 2.15
Graafin jokainen solmu kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Lause 2.13
Graafin jokainen särmä kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Lause 2.14
Graafin jokainen separoitumaton aligraafi on jonkin lohkon aligraafi.

Seuraus 2.15
Graafin jokainen solmu kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Lause 2.16
Graafin jokainen särmä, joka ei ole luuppi, kuuluu täsmälleen yhteen lohkoon.

Lause 2.13
Graafin jokainen särmä kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Lause 2.14
Graafin jokainen separoitumaton aligraafi on jonkin lohkon aligraafi.

Seuraus 2.15
Graafin jokainen solmu kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Lause 2.16
Graafin jokainen särmä, joka ei ole luuppi, kuuluu täsmälleen yhteen lohkoon.

Lause 2.17
Solmu v on yhtenäisen graafin G irrotussolmu täsmälleen silloin, kun on olemassa kaksi sellaista graafin G eri solmua u ja w, että $u \neq v$, $w \neq v$ ja v on jokaisen solmujen u ja w välisen polun solmu.

Lause 2.18

Yhtenäinen graafi G on separoituva täsmälleen silloin, kun graafilla G on kaksi vähintään kaksisolmuista aligraafia, joilla on täsmälleen yksi yhteinen solmu ja joiden yhdisteenä saadaan graafi G.

Lause 2.18

Yhtenäinen graafi G on separoituva täsmälleen silloin, kun graafilla G on kaksi vähintään kaksisolmuista aligraafia, joilla on täsmälleen yksi yhteinen solmu ja joiden yhdisteenä saadaan graafi G.

Seuraus 2.19

Yhtenäisessä separoituvassa graafissa on ainakin kolme solmua.

Lause 2.18

Yhtenäinen graafi G on separoituva täsmälleen silloin, kun graafilla G on kaksi vähintään kaksisolmuista aligraafia, joilla on täsmälleen yksi yhteinen solmu ja joiden yhdisteenä saadaan graafi G.

Seuraus 2.19

Yhtenäisessä separoituvassa graafissa on ainakin kolme solmua.

Lause 2.20

Jokaisessa vähintään kaksisolmuisessa graafissa on ainakin kaksi solmua, jotka eivät ole irrotussolmuja.

2.7 Irrotus ja irrotusjoukko

Paitsi solmuja poistamalla graafi voidaan jakaa komponentteihin myös särmiä poistamalla.

Määritelmä 2.16
Yhtenäisen graafin *irrotusjoukko* on minimaalinen särmäjoukko, jonka poistaminen graafista jakaa graafin kahteen komponenttiin.

2.7 Irrotus ja irrotusjoukko

Paitsi solmuja poistamalla graafi voidaan jakaa komponentteihin myös särmiä poistamalla.

Määritelmä 2.16
Yhtenäisen graafin *irrotusjoukko* on minimaalinen särmäjoukko, jonka poistaminen graafista jakaa graafin kahteen komponenttiin.

Yhtenäisen graafin $G = (V, E)$ särmäjoukko $F \subseteq E$ on siis graafin G irrotusjoukko, jos (i) $G - F$ ei ole yhtenäinen ja (ii) $G - H$ on yhtenäinen aina, kun $H \subset F$ (aito osajoukko). Graafilla voi siis olla useita irrotusjoukkoja ja irrotusjoukoissa voi olla eri määrä särmiä.

2.7 Irrotus ja irrotusjoukko

Paitsi solmuja poistamalla graafi voidaan jakaa komponentteihin myös särmiä poistamalla.

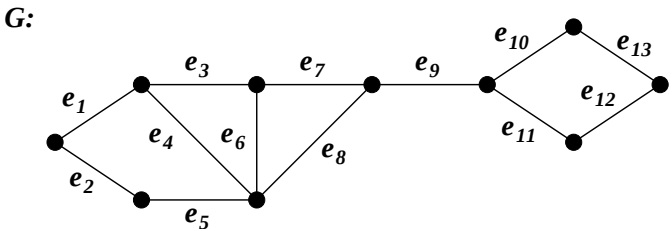
Määritelmä 2.16
Yhtenäisen graafin *irrotusjoukko* on minimaalinen särmäjoukko, jonka poistaminen graafista jakaa graafin kahteen komponenttiin.

Yhtenäisen graafin $G = (V, E)$ särmäjoukko $F \subseteq E$ on siis graafin G irrotusjoukko, jos (i) $G - F$ ei ole yhtenäinen ja (ii) $G - H$ on yhtenäinen aina, kun $H \subset F$ (aito osajoukko). Graafilla voi siis olla useita irrotusjoukkoja ja irrotusjoukoissa voi olla eri määrä särmiä.

Määritelmä 2.17
Yksisärmäistä irrotusjoukkoa sanotaan *sillaksi*.

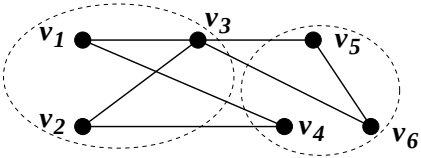
Esimerkki 2.10

Kuvan 2.16 graafin G irrotusjoukkoja ovat esimerkiksi joukot $\{e_1, e_5\}$, $\{e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_7, e_8\}$ ja $\{e_9\}$. Irrotusjoukko $\{e_9\}$ on silta.



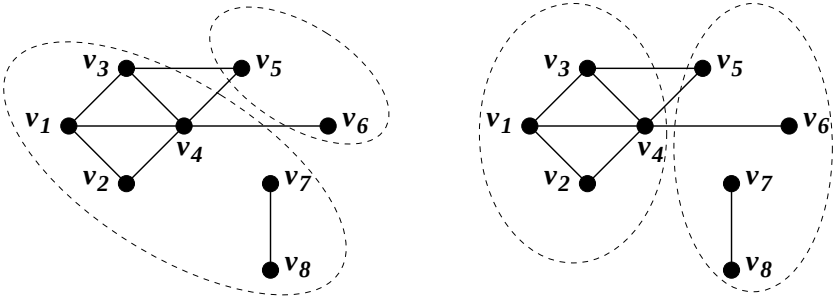
Kuva 2.16. Yksinkertainen graafi G.

Määritelmä 2.18
Olkoon $\{V_1, V_2\}$ graafin $G = (V, E)$ solmujoukon V jokin luokkajako. Tällöin niiden särmien joukko, joiden toinen päätesolmu on joukossa V_1 ja toinen joukossa V_2, on graafin G *irrotus*. Tälle irrotukselle käytetään merkintää $\langle V_1, V_2 \rangle$.

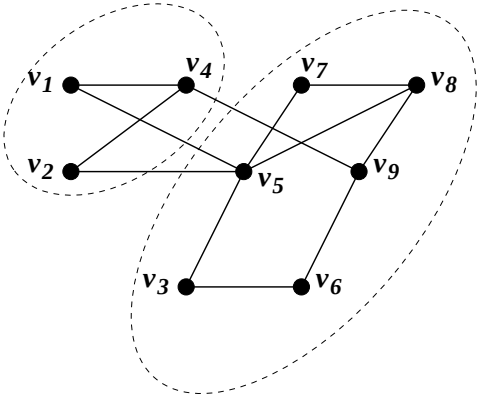


Kuva 2.17. Nelisärmäinen irrotus $\langle \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\} \rangle$.

Irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on siis minimaalinen särmäjoukko, joka jakaa graafin G kahdeksi solmujoukkojen V_1 ja V_2 indusoimaksi graafiksi. Irrotuksen särmäjoukko ei kuitenkaan määrää joukkoja V_1 ja V_2 yksikäsitteisesti, joten irrotusta ei yleisesti voi esittää pelkästään luettelemalla sen särmät. Esimerkiksi kuvassa 2.18 irrotuksien $\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\}, \{v_5, v_6\} \rangle$ ja $\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5, v_6, v_7, v_8\} \rangle$ särmät ovat samat, mutta solmujen luokkajaot eroavat.



Kuva 2.18. Graafi, jossa kahta eri irrotusta vastaavat särmäjoukot ovat samat.



Kuva 2.19. Kolmisärmäinen irrotus $\langle\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}\rangle$. Tämä irrotus on myös irrotusjoukko.

Lause 2.21

Yhtenäisen graafin $G = (V, E)$ irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun solmujoukkojen V_1 ja V_2 indusoimat graafin G aligraafit $\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ ovat yhtenäisiä.

Lause 2.21

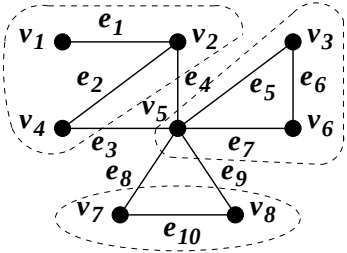
Yhtenäisen graafin $G = (V, E)$ irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun solmujoukkojen V_1 ja V_2 indusoimat graafin G aligraafit $\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ ovat yhtenäisiä.

Lause 2.22

Jos F on yhtenäisen graafin G irrotusjoukko ja $G_1 = (V_1, E_1)$ sekä $G_2 = (V_2, E_2)$ ovat graafin $G - F$ kaksi komponenttia, niin $F = \langle V_1, V_2 \rangle$.

Lause 2.23

Yhtenäisen graafin G irrotus on joidenkin graafin G erillisten irrotusjoukkojen yhdiste.



Kuva 2.20. Irrotus $\{e_3, e_4, e_8, e_9\}$ on erillisten irrotusjoukkojen $\{e_3, e_4\}$ ja $\{e_8, e_9\}$ yhdiste.

Lause 2.24

Graafin G kahden eri irrotuksen symmetrinen erotus on graafin G irrotus.

Lause 2.24

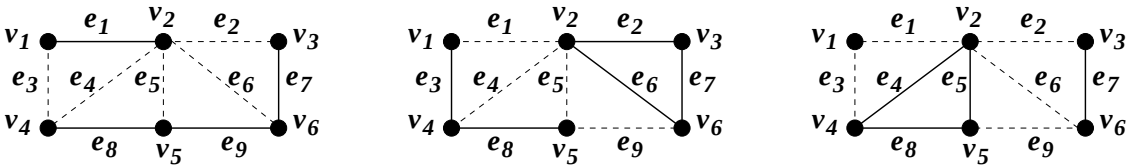
Graafin G kahden eri irrotuksen symmetrinen erotus on graafin G irrotus.

Seuraus 2.25

Graafin G kahden erillisen irrotuksen yhdiste on graafin G irrotus.

Lause 2.24
Graafin G kahden eri irrotuksen symmetrinen erotus on graafin G irrotus.

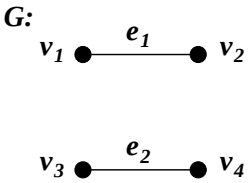
Seuraus 2.25
Graafin G kahden erillisen irrotuksen yhdiste on graafin G irrotus.



Kuva 2.21. Irrotus $\{e_1, e_2, e_3, e_6, e_9\}$ on irrotusten $\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ja $\{e_1, e_4, e_5, e_9\}$ symmetrinen erotus.

Pelkkä särmäjoukko ei välttämättä määrää yksikäsitteisesti myöskään kahden irrotuksen symmetrisenä erotuksena saatavaa irrotusta. Olkoon $G = (V, E)$, kuvan 2.22 graafi, missä

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \text{ja} \quad E = \{e_1, e_2\} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}.$$



Kuva 2.22. Graafi, jossa särmäjoukko ei välttämättä määrää yksikäsitteisesti irrotusta.

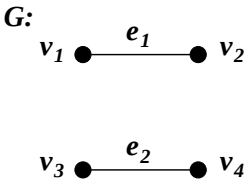
Olkoon $V_1 = \{v_1\}$ ja $V_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$ sekä $V_3 = \{v_3\}$ ja $V_4 = \{v_1, v_2, v_4\}$. Nyt

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \{e_1\} \quad \text{ja} \quad \langle V_3, V_4 \rangle = \{e_2\},$$

joten

$$\langle V_1, V_2 \rangle \oplus \langle V_3, V_4 \rangle = \{e_1\} \oplus \{e_2\} = \{e_1, e_2\}$$

ja tämä irrotus voi olla joko $\langle \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \rangle$ tai $\langle \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\} \rangle$.



Kuva 2.22. Graafi, jossa särmäjoukko ei välttämättä määrää yksikäsitteisesti irrotusta.

Lause 2.26

Jos v *on yhtenäisen vähintään kaksisolmuisen graafin* $G = (V, E)$ *solmu, niin* $\langle \{v\}, V \setminus \{v\} \rangle$ *on graafin* G *irrotus. Tämä irrotus on irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun* $G - v$ *on yhtenäinen (eli jos* v *ei ole irrotussolmu).*

Lause 2.26

Jos v on yhtenäisen vähintään kaksisolmuisen graafin $G = (V, E)$ solmu, niin $\langle \{v\}, V \setminus \{v\} \rangle$ on graafin G irrotus. Tämä irrotus on irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun $G - v$ on yhtenäinen (eli jos v ei ole irrotussolmu).

Lopuksi voidaan vielä todeta, että graafi $G = (V, E)$ on kaksijakoinen täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen graafin G irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$, että $\langle V_1, V_2 \rangle = E$.

2.8 Yhtenäisyysaste

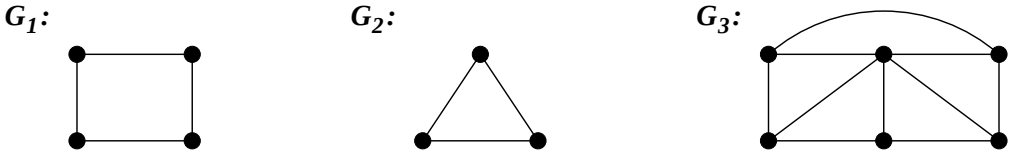
Yhtenäiset graafit voidaan luokitella sen mukaan, kuinka paljon graafista voidaan poistaa solmuja tai särmiä niin, että graafi pysyy vielä yhtenäisenä.

2.8 Yhtenäisyysaste

Yhtenäiset graafit voidaan luokitella sen mukaan, kuinka paljon graafista voidaan poistaa solmuja tai särmiä niin, että graafi pysyy vielä yhtenäisenä.

Määritelmä 2.19

Graafin G (*solmu*)*yhtenäisyysaste* $\kappa(G)$ on pienin määrä solmuja, joiden poistaminen tekee graafista epäyhtenäisen tai yksisolmuisen.



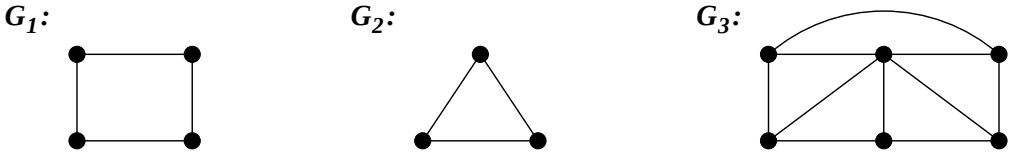
Kuva 2.23. Yhtenäisyysasteet $\kappa(G_1) = 2$, $\kappa(G_2) = 2$ ja $\kappa(G_3) = 3$.

2.8 Yhtenäisyysaste

Yhtenäiset graafit voidaan luokitella sen mukaan, kuinka paljon graafista voidaan poistaa solmuja tai särmiä niin, että graafi pysyy vielä yhtenäisenä.

Määritelmä 2.19

Graafin G (*solmu*)*yhtenäisyysaste* $\kappa(G)$ on pienin määrä solmuja, joiden poistaminen tekee graafista epäyhtenäisen tai yksisolmuisen.



Kuva 2.23. Yhtenäisyysasteet $\kappa(G_1) = 2$, $\kappa(G_2) = 2$ ja $\kappa(G_3) = 3$.

Jos graafi G on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen, niin $\kappa(G) = 0$. Muussa tapauksessa (G yhtenäinen ja vähintään kaksisolmuinen) $\kappa(G) \geq 1$.

Lause 2.28

Olkoon G yhtenäinen graafi. Jos G on kaksisolmuinen tai siinä on ainakin yksi irrotussolmu, niin $\kappa(G) = 1$. Muussa tapauksessa (G vähintään kolmisolmuinen ja siinä ei ole irrotussolmuja) $\kappa(G) \geq 2$.

Kuva 2.24. Yhtenäisyysasteet $\kappa(G_1) = 3$ ja $\kappa(G_2) = 2$.

Lause 2.28

Olkoon G yhtenäinen graafi. Jos G on kaksisolmuinen tai siinä on ainakin yksi irrotussolmu, niin $\kappa(G) = 1$. Muussa tapauksessa (G vähintään kolmisolmuinen ja siinä ei ole irrotussolmuja) $\kappa(G) \geq 2$.

Kuva 2.24. Yhtenäisyysasteet $\kappa(G_1) = 3$ ja $\kappa(G_2) = 2$.

Lause 2.29

Jos n-solmuinen yksinkertainen graafi G on täydellinen, niin $\kappa(G) = n - 1$. Muussa tapauksessa $\kappa(G) \leq n - 2$.

Määritelmä 2.20

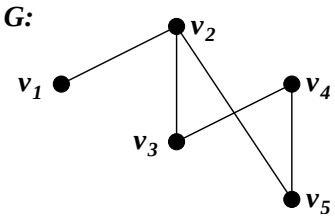
Solmujoukko $W \subset V$ on graafin $G = (V, E)$ *hajotusjoukko*, jos $G - W$ on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen.

Määritelmä 2.20

Solmujoukko $W \subset V$ on graafin $G = (V, E)$ *hajotusjoukko*, jos $G - W$ on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen.

Esimerkki 2.11

Kuvan 2.25 graafin G hajotusjoukkoja ovat esimerkiksi joukot $W_1 = \{v_2\}$, $W_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ja $W_3 = \{v_3, v_5\}$.



Kuva 2.25. Yksinkertainen graafi G.

Graafin hajotusjoukko voi olla tyhjä. Tällöin graafi on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen. Jos $G = (V, E)$ on epäyhtenäinen, mikä tahansa joukko $W \subset V$ on graafin G hajotusjoukko.

Graafin hajotusjoukko voi olla tyhjä. Tällöin graafi on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen. Jos $G = (V, E)$ on epäyhtenäinen, mikä tahansa joukko $W \subset V$ on graafin G hajotusjoukko.

Määritelmä 2.21

Graafi G on (vähintään) k-*yhtenäinen*, jos $\kappa(G) \geq k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$).

Graafin hajotusjoukko voi olla tyhjä. Tällöin graafi on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen. Jos $G = (V, E)$ on epäyhtenäinen, mikä tahansa joukko $W \subset V$ on graafin G hajotusjoukko.

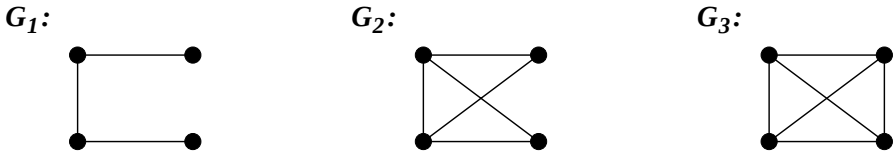
Määritelmä 2.21

Graafi G on (vähintään) k-*yhtenäinen*, jos $\kappa(G) \geq k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$).

Siis k-yhtenäisessä graafissa jokaisessa hajotusjoukossa on vähintään k solmua. Edelleen, jos graafissa G on n solmua, niin G on korkeintaan $(n-1)$-yhtenäinen. Yhtenäiset vähintään kaksisolmuiset graafit ovat 1-yhtenäisiä.

Esimerkki 2.12

Kuvan 2.26 graafi G_1 on 1-yhtenäinen ja $\kappa(G_1) = 1$. Graafi G_2 on 1- ja 2-yhtenäinen ja $\kappa(G_2) = 2$. Graafi G_3 taas on 1-, 2- ja 3-yhtenäinen ja $\kappa(G_3) = 3$.



Kuva 2.26. Yksinkertaiset graafit G_1, G_2 ja G_3.

Seuraavat kaksi lausetta seuraavat suoraan lauseista 2.28 ja 2.29.

Lause 2.30

Olkoon G yhtenäinen vähintään kolmisolmuinen graafi. Tällöin G on 2-yhtenäinen täsmälleen silloin, kun graafissa G ei ole irrotussolmuja.

Lause 2.31

Jos n-solmuinen yksinkertainen graafi G on täydellinen, niin G on $(n-1)$-yhtenäinen. Muussa tapauksessa G on korkeintaan $(n-2)$-yhtenäinen.

Seuraavat kaksi lausetta seuraavat suoraan lauseista 2.28 ja 2.29.

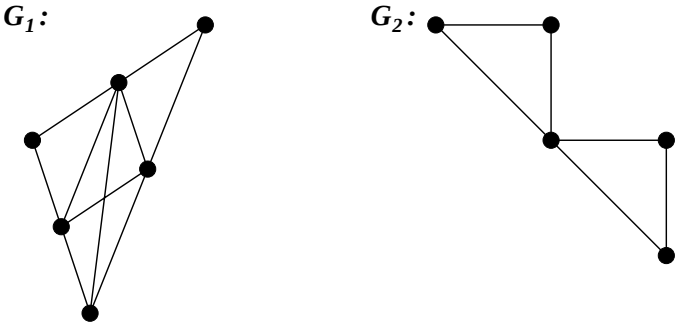
Lause 2.30
Olkoon G yhtenäinen vähintään kolmisolmuinen graafi. Tällöin G on 2-yhtenäinen täsmälleen silloin, kun graafissa G ei ole irrotussolmuja.

Lause 2.31
Jos n-solmuinen yksinkertainen graafi G on täydellinen, niin G on $(n-1)$-yhtenäinen. Muussa tapauksessa G on korkeintaan $(n-2)$-yhtenäinen.

Seuraava lause taas osoittaa, että graafin yhtenäisyysaste ei voi olla suurempi kuin minimiaste.

Lause 2.32
Graafin yhtenäisyysasteen ja minimiasteen välillä on voimassa arvio

$$\kappa(G) \leq \delta(G).$$



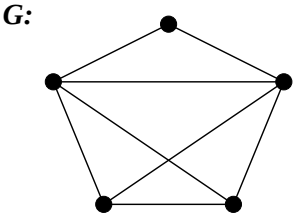
Kuva 2.27. Graafien minimiasteet ovat $\delta(G_1) = 2$ ja $\delta(G_2) = 2$ ja yhtenäisyysasteet ovat $\kappa(G_1) = 2$ ja $\kappa(G_2) = 1$.

Lause 2.33

Jos n-solmuisessa graafissa G on m särmää, niin $\kappa(G) \leq \lfloor 2m/n \rfloor$.

Lause 2.33
Jos n-solmuisessa graafissa G on m särmää, niin $\kappa(G) \leq \lfloor 2m/n \rfloor$.

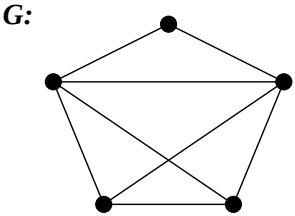
Esimerkki 2.13
Kuvan 2.28 graafissa G on 5 solmua ja 8 särmää, joten lauseen 2.33 perusteella $\kappa(G) \leq \lfloor 16/5 \rfloor = 3$. (Itse asiassa $\kappa(G) = 2$.)



Kuva 2.28. Yksinkertainen graafi G.

Lause 2.33
Jos n-solmuisessa graafissa G on m särmää, niin $\kappa(G) \leq \lfloor 2m/n \rfloor$.

Esimerkki 2.13
Kuvan 2.28 graafissa G on 5 solmua ja 8 särmää, joten lauseen 2.33 perusteella $\kappa(G) \leq \lfloor 16/5 \rfloor = 3$. (Itse asiassa $\kappa(G) = 2$.)



Kuva 2.28. Yksinkertainen graafi G.

Lause 2.34
Särmiä n-solmuisessa k-yhtenäisessä graafissa on vähintään $\lceil kn/2 \rceil$.

Määritelmä 2.22

Hararyn graafi $H_{k,n}$ ($k < n$) on graafi, joka muodostetaan seuraavasti. Jos k on parillinen ($= 2r$), niin $H_{k,n} = H_{2r,n} = (V, E)$, missä

$$V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$$

ja

$$E = \left\{ \{v_i, v_j\} \;\middle|\; i \neq j \text{ ja joko } |i - j| \leq r \text{ tai } |n - (i - j)| \leq r \right\}.$$

Määritelmä 2.22

Hararyn graafi $H_{k,n}$ ($k < n$) on graafi, joka muodostetaan seuraavasti. Jos k on parillinen ($= 2r$), niin $H_{k,n} = H_{2r,n} = (V, E)$, missä

$$V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$$

ja

$$E = \left\{ \{v_i, v_j\} \;\middle|\; i \neq j \text{ ja joko } |i-j| \leq r \text{ tai } |n-(i-j)| \leq r \right\}.$$

Jos k on pariton ($= 2r + 1$), mutta n on parillinen saadaan Hararyn graafi $H_{2r+1,n}$ lisäämällä Hararyn graafiin $H_{2r,n}$ särmät

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \{v_i, v_j\} \;\middle|\; i \neq j \text{ ja } |i-j| = \frac{n}{2} \right\} \\ &= \{\{v_0, v_{n/2}\}, \{v_1, v_{n/2+1}\}, \ldots, \{v_{n/2-1}, v_{n-1}\}\}. \end{aligned}$$

Jos sekä k $(= 2r + 1)$ että n ovat parittomia, saadaan Hararyn graafi $H_{2r+1,n}$ lisäämällä Hararyn graafiin $H_{2r,n}$ särmät

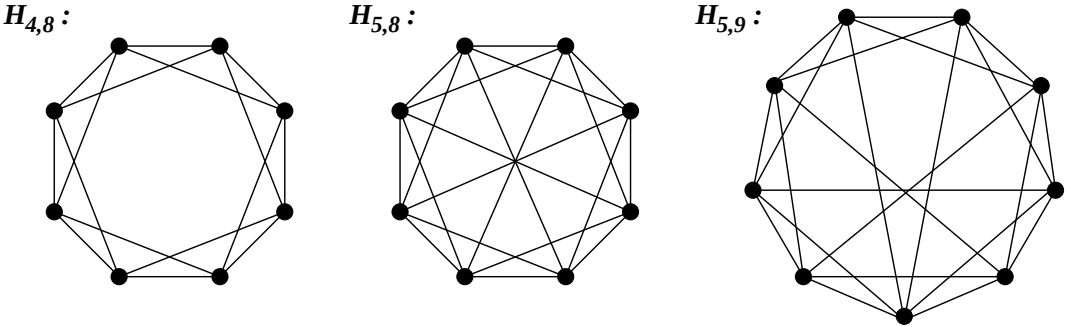
$$\begin{aligned} F &= \left\{ \{v_i, v_j\} \;\middle|\; i = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2} \text{ ja } j = i + \frac{n+1}{2} \right\} \\ &= \{\{v_0, v_{(n+1)/2}\}, \{v_1, v_{(n+1)/2+1}\}, \ldots, \{v_{(n-1)/2}, v_n\}\}, \end{aligned}$$

missä $v_n = v_0$.

Jos sekä k $(= 2r+1)$ että n ovat parittomia, saadaan Hararyn graafi $H_{2r+1,n}$ lisäämällä Hararyn graafiin $H_{2r,n}$ särmät

$$F = \left\{ \{v_i, v_j\} \;\middle|\; i = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2} \text{ ja } j = i + \frac{n+1}{2} \right\}$$
$$= \{\{v_0, v_{(n+1)/2}\}, \{v_1, v_{(n+1)/2+1}\}, \ldots, \{v_{(n-1)/2}, v_n\}\},$$

missä $v_n = v_0$.



Kuva 2.29. Hararyn graafit $H_{4,8}$, $H_{5,8}$ ja $H_{5,9}$.

Lause 2.35

Hararyn graafissa $H_{k,n}$ *on* $\lceil kn/2 \rceil$ *särmää.*

Lause 2.35
Hararyn graafissa $H_{k,n}$ *on* $\lceil kn/2 \rceil$ *särmää.*

Lause 2.36
Oletetaan $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $(2 \leq k < n)$. *Tällöin on olemassa yksinkertainen* n*-solmuinen* k*-yhtenäinen graafi, jossa on täsmälleen* $\lceil kn/2 \rceil$ *särmää.*

Lause 2.35
Hararyn graafissa $H_{k,n}$ *on* $\lceil kn/2 \rceil$ *särmää.*

Lause 2.36
Oletetaan $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $(2 \leq k < n)$. *Tällöin on olemassa yksinkertainen* n*-solmuinen* k*-yhtenäinen graafi, jossa on täsmälleen* $\lceil kn/2 \rceil$ *särmää.*

Lause 2.37
Olkoon G *yksinkertainen* n*-solmuinen graafi, jonka solmut on järjestetty niin, että*

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n).$$

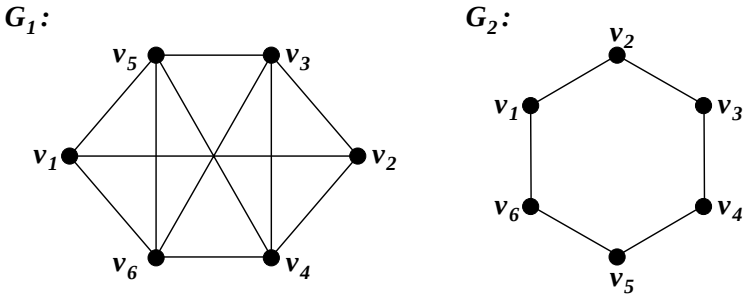
Jos tällöin $k < n$ *ja*

$$\deg(v_i) \geq i + k - 1$$

aina, kun $1 \leq i \leq n - 1 - \deg(v_{n-k+1})$, *niin* G *on* k*-yhtenäinen.*

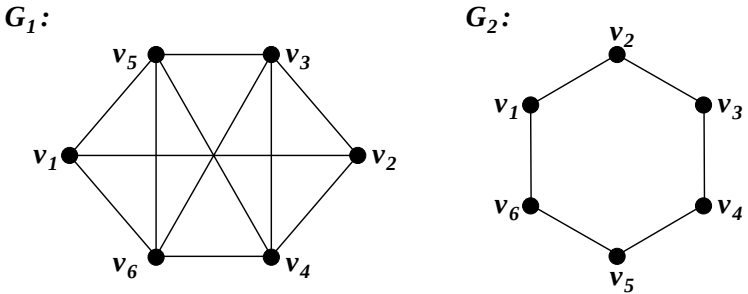
Esimerkki 2.14

Kuvan 2.30 graafissa G_1 solmujen lukumäärä n on 6. Jos $k = 3$, niin $k < n$. Edelleen $n - 1 - \deg(v_{n-k+1}) = 6 - 1 - \deg(v_4) = 6 - 1 - 4 = 1$. Kun $i = 1$, niin $i + k - 1 = 1 + 3 - 1 = 3 \leq \deg(v_1) = \deg(v_i)$. Siis graafi G_1 on lauseen 2.37 perusteella 3-yhtenäinen.



Kuva 2.30. Kolmiyhtenäinen graafi G_1 ja kaksiyhtenäinen graafi G_2.

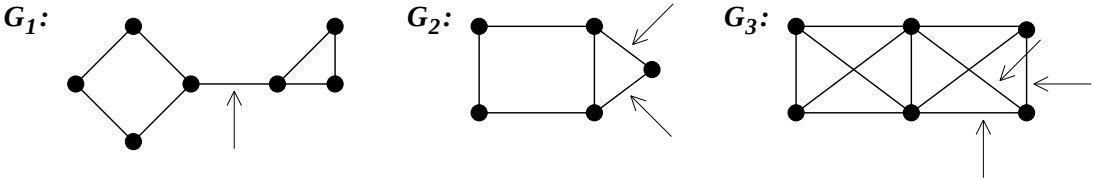
Lauseen 2.37 ehtojen toteutuminen ei ole kuitenkaan välttämätön ehto k-yhtenäisyydelle. Esimerkiksi kuvan 2.30 graafi G_2 on 2-yhtenäinen, vaikka lauseen 2.37 oletukset eivät tässä tapauksessa ole voimassa.



Kuva 2.30. Kolmiyhtenäinen graafi G_1 ja kaksiyhtenäinen graafi G_2.

2.9 Särmäyhtenäisyys

Määritelmä 2.23
Graafin G *särmäyhtenäisyysaste* $\kappa'(G)$ on pienin määrä särmiä, joiden poistaminen tekee (vähintään kaksisolmuisesta) graafista epäyhtenäisen. Yksisolmuisen graafin särmäyhtenäisyysaste on nolla.



Kuva 2.31. Särmäyhtenäisyysasteet $\kappa'(G_1) = 1$, $\kappa'(G_2) = 2$ ja $\kappa'(G_3) = 3$.

Yksisolmuisen tai epäyhtenäisen graafin särmäyhtenäisyysaste on nolla. Muulloin graafin särmäyhtenäisyysaste on graafin vähäsärmäisimmän irrotuksen särmien lukumäärä ja särmäyhtenäisyysaste on vähintään yksi.

Yksisolmuisen tai epäyhtenäisen graafin särmäyhtenäisyysaste on nolla. Muulloin graafin särmäyhtenäisyysaste on graafin vähäsärmäisimmän irrotuksen särmien lukumäärä ja särmäyhtenäisyysaste on vähintään yksi.

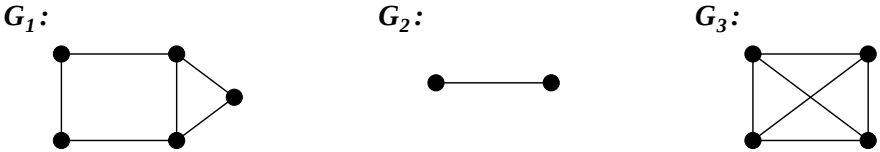
Määritelmä 2.24

Graafi G on k-*särmäyhtenäinen*, jos $\kappa'(G) \geq k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$).

Siis ainakin k särmää täytyy poistaa, jotta k-särmäyhtenäinen graafi muuttuisi epäyhtenäiseksi.

Esimerkki 2.15

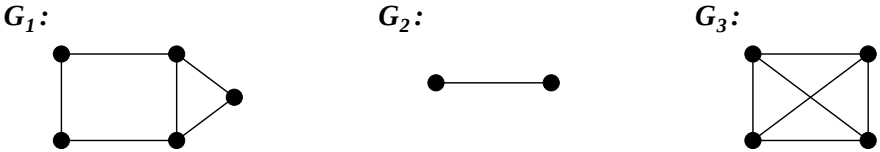
Kuvan 2.32 graafin G_1 särmäyhtenäisyysaste on kaksi ja graafi on 1- ja 2-särmäyhtenäinen. Graafin G_2 särmäyhtenäisyysaste on yksi ja graafi on 1-särmäyhtenäinen. Graafin G_3 särmäyhtenäisyysaste on kolme ja graafi on 1-, 2- ja 3-särmäyhtenäinen.



Kuva 2.32. Yksinkertaiset graafit G_1, G_2 ja G_3.

Esimerkki 2.15

Kuvan 2.32 graafin G_1 särmäyhtenäisyysaste on kaksi ja graafi on 1- ja 2-särmäyhtenäinen. Graafin G_2 särmäyhtenäisyysaste on yksi ja graafi on 1-särmäyhtenäinen. Graafin G_3 särmäyhtenäisyysaste on kolme ja graafi on 1-, 2- ja 3-särmäyhtenäinen.



Kuva 2.32. Yksinkertaiset graafit G_1, G_2 ja G_3.

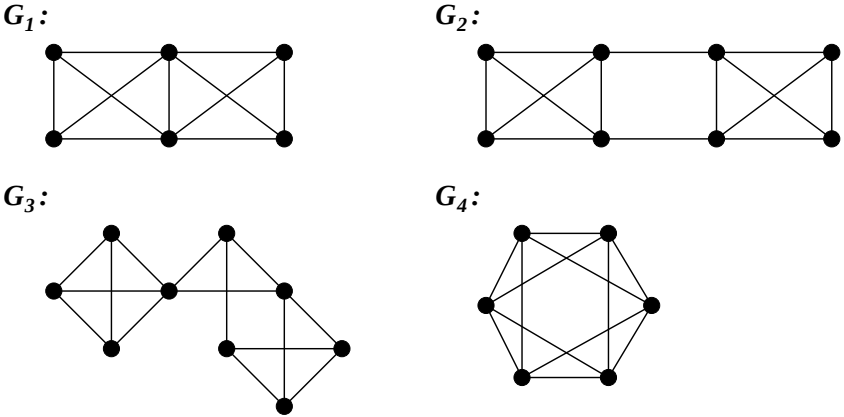
Lause 2.38

Olkoon G graafi. Tällöin yhtenäisyysasteelle, särmäyhtenäisyysasteelle ja minimiasteelle pätee

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

Esimerkki 2.16

Kuvan 2.33 yksinkertaisille graafeille $\kappa(G_1) = 2$, $\kappa'(G_1) = 3$, $\delta(G_1) = 3$, $\kappa(G_2) = 2$, $\kappa'(G_2) = 2$, $\delta(G_2) = 3$, $\kappa(G_3) = 1$, $\kappa'(G_3) = 2$, $\delta(G_3) = 3$, $\kappa(G_4) = 4$, $\kappa'(G_4) = 4$ ja $\delta(G_1) = 4$.



Kuva 2.33. Yksinkertaiset graafit G_1, G_2, G_3 ja G_4.

Lause 2.39

Olkoon G sellainen yhtenäinen yksinkertainen graafi, että

$$\kappa'(G) < \delta(G).$$

Tällöin graafissa G on sellainen irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$, että joukossa V_1 on solmu, jolla ei ole vierussolmuja joukossa V_2, ja joukossa V_2 on solmu, jolla ei ole vierussolmuja joukossa V_1.

Lause 2.39

Olkoon G sellainen yhtenäinen yksinkertainen graafi, että

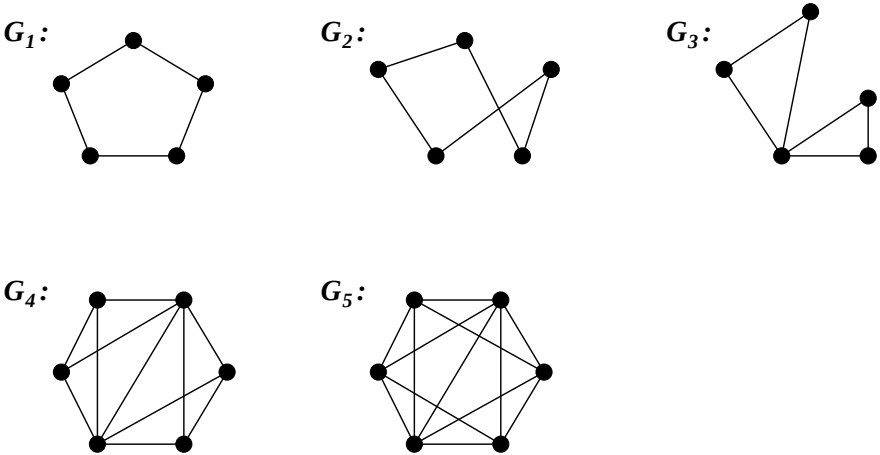
$$\kappa'(G) < \delta(G).$$

Tällöin graafissa G on sellainen irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$, että joukossa V_1 on solmu, jolla ei ole vierussolmuja joukossa V_2, ja joukossa V_2 on solmu, jolla ei ole vierussolmuja joukossa V_1.

Lause 2.40

Olkoon G jokin sellainen n-solmuinen yksinkertainen graafi, että $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$. Tällöin

$$\kappa'(G) = \delta(G).$$



Kuva 2.34. Graafeja, joiden särmäyhtenäisyysasteet ja minimiasteet ovat yhtäsuuret.

2.10 Mengerin lause

Seuraavat kaksi versiota Mengerin lauseesta antavat yhteyden graafin yhtenäisyysasteiden ja solmuiltaan tai särmiltään erillisten polkujen lukumäärän välillä.

2.10 Mengerin lause

Seuraavat kaksi versiota Mengerin lauseesta antavat yhteyden graafin yhtenäisyysasteiden ja solmuiltaan tai särmiltään erillisten polkujen lukumäärän välillä.

Lause 2.41
Yksinkertainen n-solmuinen graafi G on k-solmuyhtenäinen ($k < n$) täsmälleen silloin, kun graafin G minkä tahansa kahden eri solmun välillä on ainakin k solmuiltaan erillistä polkua (ts. kaikki välisolmut eri solmuja).

2.10 Mengerin lause

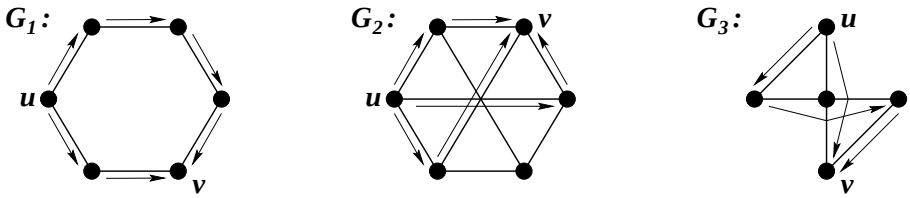
Seuraavat kaksi versiota Mengerin lauseesta antavat yhteyden graafin yhtenäisyysasteiden ja solmuiltaan tai särmiltään erillisten polkujen lukumäärän välillä.

Lause 2.41
Yksinkertainen n-solmuinen graafi G on k-solmuyhtenäinen ($k < n$) täsmälleen silloin, kun graafin G minkä tahansa kahden eri solmun välillä on ainakin k solmuiltaan erillistä polkua (ts. kaikki välisolmut eri solmuja).

Lause 2.42
Yksinkertainen n-solmuinen graafi G on k-särmäyhtenäinen ($k < n$) täsmälleen silloin, kun graafin G minkä tahansa kahden eri solmun välillä on ainakin k särmiltään erillistä polkua.

Esimerkki 2.17

Kuvan 2.35 graafeilla $\kappa(G_1) = 2$, $\kappa(G_2) = 3$, $\kappa(G_3) = 1$, $\kappa'(G_1) = 2$, $\kappa'(G_2) = 3$ ja $\kappa'(G_3) = 2$. Esimerkiksi solmujen u ja v välillä on graafeissa G_1 ja G_3 kaksi särmiltään erillistä polkua ja graafissa G_2 kolme särmiltään erillistä polkua.



Kuva 2.35. Graafeilla G_1, G_2 ja G_3 on eri yhtenäisyysasteet.