Riippuvuuslogiikka, kevät 2018
Harjoitus 6
30.4.2018

1. Anna seuraavien lauseiden Skolem normaalimuodot:

   (a) $\forall x \exists y\, R(x,y)$ (b) $\exists x \forall y\, R(x,y)$
   (c) $\exists f \forall x \exists y\, R(f(x,y),y)$ (d) $\forall x \exists f \forall y \exists z\, R(f(y,z),z)$

2. Käännä seuraavat Skolem normaalimuotoiset Σ^1_1-lauseet ekvivalenteiksi riippuvuuslogiikan $\mathcal{FO}(=())$ lauseiksi:

   (a) $\exists f \exists g \forall x \forall y R(x,y,f(x,y),g(x,y))$ (b) $\exists f \exists g \forall x \forall y R(x,y,f(x),g(y))$

3. Olkoon $\tau = \{R\}$, missä $\sharp(R) = n$. Muodosta $\Sigma^1_1[\tau]$-lause φ, jolla ilmaisee relaation R parillisuuden: $M \vDash \varphi \iff |R^M|$ on parillinen (tai ääretön).

   Vihje: eksistenssikvantifioi lineaarjärjestys, ja käytä vastaavaa n-jonojen leksikograafista järjestystä.

4. Määritellään kvanttori $\exists^1$ seuraavasti:

$$M \vDash_X \exists^1 x\varphi \iff M \vDash_{X[F_a/x]} \varphi \text{ jollain } a \in \mathrm{dom}(M),$$

   missä $F_a : X \to \mathcal{P}((M)) \setminus \{\emptyset\}$ on funktio, jolla $F_a(s) = \{a\}$. Osoita, että $\exists^1$ voidaan määritellä riippuvuuslogiikassa.

   Vihje: käytä vakioisuusatomia $=(x)$.

5. Kvanttori $\forall^1$ määritellään samaan tapaan:

$$M \vDash_X \forall^1 x\varphi \iff M \vDash_{X[F_a/x]} \varphi \text{ kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M),$$

   missä F_a on kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että $\mathcal{FO}(=(),\forall^1)$ (riippuvuuslogiikan laajennus kvanttorilla $\forall^1$) on alaspäin suljettu. Miten tästä seuraa, että $\mathcal{FO}(=(),\forall^1) \equiv \mathcal{FO}(=())$?

   Huomaa, että riittää osoittaa, että jos kaava φ on alaspäin suljettu, niin myös kaava $\forall^1 x\varphi$ on.

6. Olkoon A joukko, ja $\Gamma : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ operaattori. Γ on monotoninen, jos kaikilla $S,T \subseteq A$ pätee: $S \subseteq T \Rightarrow \Gamma(S) \subseteq \Gamma(T)$. Γ on inflatorinen, jos kaikilla $S \subseteq A$ pätee $S \subseteq \Gamma(S)$. Osoita, että jos Γ on monotoninen tai inflatorinen, niin se on myös induktiivinen: $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ aina kun $i \leq j$. Tässä Γ_i määritellään rekursiolla seuraavasti: $\Gamma_0 = \emptyset$ ja $\Gamma_{i+1} = \Gamma(\Gamma_i)$.

7. Anna esimerkki operaattorista Γ, joka on (a) monotoninen, mutta ei inflatorinen, (b) inflatorinen, mutta ei monotoninen.